

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE BROUSSE

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE SAINT-CLOUD
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

1^{re} THÈSE

ÉTUDE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
RENCONTRÉES DANS LA THÉORIE DES PHÉNOMÈNES DE TORSION

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

APPLICATION DU CALCUL SYMBOLIQUE A L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Soutenues le 15 juin 1950, devant la Commission d'Examen

Jury { MM. VILLAT
PÉRÈS
PONCIN

Président.

{ *Examineurs.*

THÈSES

PRESENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE BROUSSE

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE SAINT-CLOUD
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

1^{re} THÈSE

ÉTUDE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
RENCONTRÉES DANS LA THÉORIE DES PHÉNOMÈNES DE TORSION

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

APPLICATION DU CALCUL SYMBOLIQUE A L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Soutenues le 15 juin 1950, devant la Commission d'Examen

Jury { MM. VILLAT
PÈRÈS
PONCIN

Président.

{ *Examineurs.*



ÉTUDE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
RENCONTRÉES DANS LA THÉORIE
DES PHÉNOMÈNES DE TORSION

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.
A. DENJOY	T	Théorie des fonctions.	LAFFITTE	T	Chimie générale.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	FAVARD		Calcul des probabilités et physique-mathématique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de physique.	COULOMB	T	Physique du globe.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.	CHRÉTIEN		Chimie (P.C.B.).
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	P. DRACH		Zoologie.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	KASTLER		Physique.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	EPHROSSI	T	Génétique.
JOB	T	Chimie générale.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.	BAUER	T	Chimie-physique.
COMBES	T	Physiologie végétale.	RIVIÈRE		Géologie (P.C.B.).
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	GAUTHERET		Biologie végétale (P.C.B.).
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.	LUCAS		Physique.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.	A. THOMAS		Évolution des êtres organisés.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	ARNULF		Optique appliquée.
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique.	Max MORAND		Physique.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	SOLEILLET		Physique.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
CHAZY	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	DANJON	T	Astronomie.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	FROMAGEOT	T	Chimie biologique.
DUPONT	T	Théories chimiques.	LAPORTE	T	Physique générale et radio-activité.
VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	JANET		Mathématiques générales.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	PETIT	T	Biologie maritime.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	GALLIEN		Biologie animale (P.C.B.).
Jacques BOURCART	T	Géographie physique et géologie dynamique.	EICHHORN		Biologie végétale (P.C.B.).
AUBEL	T	Chimie biologique.	DE CUGNAC		Biologie végétale (P.C.B.).
M ^{me} JOLIO-CURIE	T	Physique générale et radio-activité.	LAVAL		Physique (P.C.B.).
PLANTEFOL	T	Botanique.	M ^{lle} CAUCHOIS		Chimie-physique.
CABANNES	T	Recherches physiques.	THELLIER		Physique du globe.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	AUDUBERT		Électrochimie.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	L'HÉRITIER		Génétique.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la géométrie.	GRIVET	T	Radio-électricité.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	PONCIN		Mécanique des fluides.
WYART	T	Minéralogie.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
TEISSIER	T	Zoologie.	DUBREIL		Mathématiques générales.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	QUELET		Chimie (P.C.B.).
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	CAGNIARD		Géophysique appliquée.
MONNIER		Physiologie générale.	CHAMPETIER		Chimie appliquée.
PIVETEAU	T	Géologie.	CUVILLIER		Géologie structurale et géologie appliquée.
ROCARD	T	Physique.	JUNG		Pétrographie.
H. CARTAN	T	Mathématiques générales.	TRILLAT		Physique (P.C.B.).
			WIEMANN		Chimie (P.C.B.).
			LICHNEROWICZ		Mathématiques.
			JACQUINOT		Physique (P.C.B.).
			VASSY		Physique de l'atmosphère.
			DESTOUCHES		Théories physiques.
			PRUVOST	T	Géologie.

Secrétaire Ch. MONIER



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547113_0042

*A la mémoire de mon Frère
mort pour la France.*

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
AVANT-PROPOS	1
INTRODUCTION	3

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE PREMIER. — Origine et transformation du problème.. . . .	5
---	---

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE II. — Propriétés du domaine D	15
A. — Représentation conforme	15
B. — Fonctions harmoniques	18
C. — Fonction de Green	22
D. — Un domaine D remarquable	26
CHAPITRE III. — Existence, unicité et premières propriétés des solutions.. . . .	34
A. — Le problème $\mathcal{P}'$	34
B. — Le problème $\mathcal{P}$	39
C. — Propriétés intégrales des solutions	41
D. — Autre point de départ	47

TROISIEME PARTIE

CHAPITRE IV. — Dérivées et tensions	49
A. — Dérivées normales de certaines fonctions harmoniques	49
B. — Dérivées de l'intégrale I (M)	59
C. — Résultats relatifs aux tensions	65

AVANT-PROPOS

Le sujet de cette étude, ainsi que les documents correspondants, m'ont été fournis par M. PONCIN.

M. PÉRÈS et M. MALAVARD m'ont également signalé l'importance que présente l'étude de certains problèmes de torsion et m'ont permis de confronter les résultats que donnent les méthodes analytiques développées dans ce mémoire et ceux qui résultent du calcul analogique.

Je remercie également M. MAZET, auprès duquel j'ai toujours trouvé le meilleur accueil.

Je suis très reconnaissant à MM. VILLAT, PÉRÈS et PONCIN d'avoir bien voulu accepter ce modeste travail comme thèse de doctorat et je les prie d'agréer l'expression de mes remerciements respectueux.

Je suis heureux de dire ici tout ce que je dois à M. PONCIN. Non seulement il m'a fourni les éléments initiaux de ce travail, mais encore il m'a constamment encouragé, m'a donné de précieux conseils; il a aplani pour moi bien des difficultés. J'ai pour lui la plus vive gratitude.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude de la torsion d'un arbre de révolution qui, primitivement cylindrique et de longueur infinie, a été creusé d'une gorge de révolution ayant même axe que le cylindre. Le cas où le profil de la gorge est un demi-cercle retient particulièrement notre attention, car il a donné lieu à de nombreuses études expérimentales en raison de son intérêt technique. Mais la plupart des résultats obtenus s'appliquent à des formes beaucoup plus générales.

Nous commençons par le rappel des notions classiques et par l'exposé sommaire des principaux points de vue envisagés par les auteurs qui se sont occupés de la question antérieurement. Le domaine d'étude est la section de l'arbre par un demi-plan méridien (domaine D). Nous donnons plusieurs formes à l'équation. Puis nous généralisons en remplaçant certains coefficients numériques par des nombres positifs quelconques. Cela nous amène à l'énoncé de deux problèmes de DIRICHLET ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$). Les méthodes habituelles ne s'appliquent pas à ces problèmes car le domaine D est infini et que l'un des coefficients de l'équation est infini sur une partie de la frontière.

La deuxième partie du mémoire est constituée par la résolution des problèmes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Le premier chapitre est réservé à l'étude de la représentation conforme du domaine D , sur un demi-plan, à celle de certaines fonctions harmoniques qui seront utilisées par la suite, et de la fonction de Green. On obtient ainsi des propriétés, relatives surtout aux points à l'infini de la fonction et de ses dérivées dans des cas assez étendus. Enfin, nous donnons une fonction assurant la représentation conforme d'un demi-plan sur un domaine D où la section de la gorge est très voisine d'un demi-cercle, l'erreur relative pouvant être inférieure à un dix-millième.

Le deuxième chapitre débute par la démonstration de l'existence d'une solution f pour le problème $\mathcal{P}$. On opère en isolant les points singuliers, en résolvant le même problème pour le domaine partiel ainsi formé, puis en faisant tendre ce domaine vers D . Le problème $\mathcal{P}'$ a également une solution. Les théorèmes d'unicité sont démontrés grâce à des fonctions auxiliaires. Enfin, on montre que la fonction f vérifie une équation de Fredholm, comme dans le cas classique où il n'y a pas d'éléments singuliers. Elle vérifie également des propriétés intégrales s'appliquant à un contour quelconque de D . Ces identités caractérisent même les solutions régulières des équations initiales; elles généralisent une propriété classique des fonctions harmoniques.

La troisième partie est réservée à l'étude des dérivées à laquelle correspond, au point de vue technique, celle des efforts supportés par l'arbre. Dans un premier paragraphe A, nous étudions la dérivée normale de la fonction harmonique h , prenant sur la frontière de D , les mêmes valeurs que f . Cette étude nous a procuré l'occasion de

démontrer quelques propriétés plus générales que celles qui étaient strictement utiles dans la question étudiée. Dans des cas concrets, nous encadrons la dérivée avec une bonne approximation. Le paragraphe B est l'étude analogue pour une intégrale étendue à D et dont la somme avec h donne f . Dans le paragraphe C apparaissent les résultats relatifs aux tensions. Ce sont souvent les conséquences directes des propriétés obtenues précédemment. Ils portent soit sur les tensions elles-mêmes, soit sur le facteur de concentration de tension. Le cas du demi-cercle donne lieu à une étude particulière. Signalons que lorsque la profondeur de l'encoche tend vers zéro, il n'y a pas, en général, continuité des tensions sur cette encoche. Nous avons calculé pour le demi-cercle la limite au sommet.

Les méthodes analogiques de MM. PÉRÈS et MALAVARD donnent des résultats qui peuvent être confrontés avec ceux obtenus ici. L'utilisation de l'analogie A se heurte, au point de vue théorique, à quelques difficultés. D'abord, la profondeur de la cuve ne peut être infinie sur l'électrode axiale. Dans le cas où la profondeur de la gorge n'est pas trop grande, j'ai montré qu'il est légitime de supprimer une bande le long de l'axe, et j'ai chiffré l'erreur maximum en résultant. Ensuite, la longueur de la cuve est naturellement finie. On peut, de même, borner l'erreur correspondante. Les méthodes analytique et analogique se rejoignent donc et se complètent de façon très heureuse. Elles fournissent ainsi des résultats indiscutables susceptibles d'être appliqués dans la pratique, lorsque la grandeur des efforts ne dépasse pas les limites au delà duquel le phénomène cesse d'être réversible.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER

ORIGINE ET TRANSFORMATION DU PROBLÈME

1 Nous rappellerons d'abord les équations d'équilibre d'un arbre de révolution quelconque, lorsqu'on applique des couples de torsion à ses extrémités (1).

Rapportons ce solide aux axes rectangulaires $Oxyz$, Ox étant l'axe de révolution. Un point quelconque M , de projection H sur le plan yOz , sera repéré par ses coordonnées semi-polaires :

$$\omega = (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{OH}), \quad \rho = OH, \quad x = \overline{HM}_x.$$

Soit $\bar{e}$ le trièdre formé par OH , l'axe du plan yOz directement perpendiculaire à OH en O , et Ox . Les composantes sur $\bar{e}$ du déplacement en M seront désignées par v_ρ , v_ω , v_x ; celles sur le même trièdre de la déformation radiale et de la distorsion en ce point, sont alors :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\omega = \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\omega}{\partial \omega}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ \gamma_{\rho\omega} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \omega} + \frac{\partial v_\omega}{\partial \rho} - \frac{v_\omega}{\rho}, \quad \gamma_{x\rho} = \frac{\partial v_\rho}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial \rho}, \quad \gamma_{\omega x} = \frac{\partial v_\omega}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_x}{\partial \omega}. \end{array} \right.$$

Ces nombres sont liés aux composantes (σ_ρ , σ_ω , σ_x ; $\bar{e}_{\rho\omega}$, $\bar{e}_{x\rho}$, $\bar{e}_{\omega x}$) de la tension par les relations suivantes traduisant la loi de Hooke (2) :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_\rho = \frac{1}{E} [\sigma_\rho - \nu (\sigma_\omega + \sigma_x)] \quad \gamma_{\rho\omega} = \frac{\bar{e}_{\rho\omega}}{E_1}, \\ \varepsilon_\omega = \frac{1}{E} [\sigma_\omega - \nu (\sigma_\rho + \sigma_x)] \quad \gamma_{x\rho} = \frac{\bar{e}_{x\rho}}{E_1}, \\ \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_\omega + \sigma_\rho)] \quad \gamma_{\omega x} = \frac{\bar{e}_{\omega x}}{E_1}, \end{array} \right.$$

ν étant le coefficient de Poisson, E le module d'élasticité longitudinale, $E_1 = \frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de glissement.

(1) TIMOSHENKO. — *Théorie de l'élasticité*, 1936, pp. 297 et suiv.

(2) TIMOSHENKO. — *Théorie de l'élasticité*, pp. 7 et suiv.

Considérons un élément du solide, contenant le point $M(\rho, \omega, x)$, infiniment petit dans toutes ses dimensions et limité par trois couples de surfaces coordonnées. Négligeant les forces massiques appliquées à cet élément, on obtient les équations d'équilibre de Lamé et Clapeyron (1) :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{\rho\omega}}{\partial \omega} + \frac{\partial \bar{\tau}_{\rho x}}{\partial x} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_x}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{\rho x}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{\omega x}}{\partial \omega} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\bar{\tau}_{\rho x}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{\rho\omega}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial \omega} + \frac{\partial \bar{\tau}_{\omega x}}{\partial x} + \frac{2 \bar{\tau}_{\rho\omega}}{\rho} = 0. \end{cases}$$

Faisons les hypothèses suivantes :

$$v_\rho = v_x = 0; \quad v_\omega \text{ indépendant de } \omega.$$

Cela revient à admettre que le déplacement se fait tangentiellement et qu'il est le même tout le long d'un cercle d'axe Ox . Les formules (1) et (2) donnent alors :

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_\rho = \sigma_\omega = \sigma_x = \bar{\tau}_{\rho x} = 0, \\ \bar{\tau}_{\rho\omega} = E_1 \left(\frac{\partial v_\omega}{\partial \rho} - \frac{v_\omega}{\rho} \right) = E_1 \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v_\omega}{\rho} \right), \\ \bar{\tau}_{\omega x} = E_1 \frac{\partial v_\omega}{\partial x} = E_1 \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_\omega}{\rho} \right). \end{cases}$$

Les équations d'équilibre (3) se réduisent à une seule :

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \bar{\tau}_{\rho\omega}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho^2 \bar{\tau}_{\omega x}) = 0.$$

Soit $U(x, \rho)$ une fonction, dite fonction de tension, telle que :

$$(6) \quad \rho^2 \bar{\tau}_{\rho\omega} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \rho^2 \bar{\tau}_{\omega x} = \frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

Il résulte des équations (4) que $U(x, \rho)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles :

$$(7) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0.$$

(1) *Journal de Crelle*, 1838, vol. 7.

Les conditions au contour sont les suivantes :

a) la surface extérieure ne supporte aucune force; on en déduit que la tension en un point de cette surface extérieure est tangente à la méridienne de ce point, et que le long de cette courbe, on a :

$$\begin{aligned}\bar{c}_{\rho\omega} dx - \bar{c}_{\omega x} d\rho &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho &= 0,\end{aligned}$$

soit enfin $U = \text{constante}$;

b) aux deux extrémités de l'arbre, supposées planes, les tensions équilibrent les forces extérieures.

Enfin, nous supposons que U est nul sur Ox .

Le moment s'exerçant sur une section transversale de cote x , de rayon ρ_1 , est :

$$(8) \quad M = \int_0^{\rho_1} 2\pi \rho^2 \cdot \bar{c}_{\omega x} \cdot d\rho = 2\pi \int_0^{\rho_1} \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho = 2\pi U(x, \rho_1).$$

On peut également prendre pour inconnue, l'angle de torsion $\psi(x, \rho) = \frac{v_\omega}{\rho}$. Utilisant les équations ci-dessus, on voit que ψ est lié à U par les relations :

$$(9) \quad \begin{cases} E_1 \rho^3 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ E_1 \rho^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \rho}. \end{cases}$$

Les courbes $\psi = \text{constante}$ sont les trajectoires orthogonales des courbes $U = \text{constante}$. La fonction ψ est alors solution de l'équation :

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0.$$

Remarquons que la tension de cisaillement en un point est :

$$(11) \quad \begin{cases} \vec{c} = \frac{1}{\rho^2} \overrightarrow{\text{grad}} U \wedge \vec{j}, \\ \vec{c} = E_1 \rho \overrightarrow{\text{grad}} \psi. \end{cases} \quad \text{ou :}$$

$[\vec{j}]$, vecteur unité de l'axe directement perpendiculaire au plan (Ox, OH) .

En particulier, la tension sur la méridienne a pour mesure :

$$(12) \quad \bar{c} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{dU}{dn},$$

$\frac{dU}{dn}$ étant la dérivée normale intérieure de U .

2 Dans la suite, nous nous occuperons d'un solide particulier ayant la forme d'un cylindre de révolution infini entaillé par une gorge de révolution autour de l'axe.

D'une façon précise, soient A, B, deux points du plan xOy (fig. 1) ayant pour coordonnées respectivement (q, R) , $(-q, R)$, q et R étant positifs, et soit ASB un arc continu situé dans les bandes :

$$-q \leq x \leq q, \quad 0 < y \leq R,$$

et dont le point d'ordonnée minimum, $R - p$, est désigné par S. Le cas où ASB est un demi-cercle retiendra particulièrement notre attention; il se présente souvent dans la pratique, et, pour cette raison, il a donné lieu à de nombreuses études expérimentales. Mais la plupart des résultats obtenus dans ce cas s'appliquent à des formes beaucoup

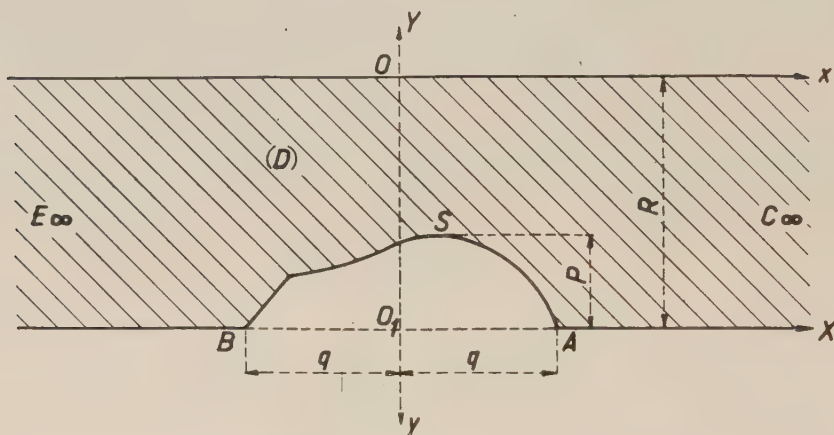


Fig. 1

plus générales. Aussi, supposons-nous seulement que ASB est formé d'un nombre fini d'arcs à courbure finie continue (même à leurs extrémités) qui se rejoignent soit en se raccordant, soit en formant des points anguleux.

Désignons par Σ la ligne formée par les demi-droites :

$$(x > q, y = R), \quad (x < -q, y = R) \quad (\text{demi-droites } \Theta)$$

et par l'arc ASB dorénavant désigné par Γ .

La ligne Σ et l'axe Ox limitent un domaine infini D, dont la révolution autour de Ox engendre un arbre avec gorge, supposé, comme plus haut, soumis à la torsion. Lorsque l'arc Γ est un demi-cercle, le domaine D s'appellera D_c .

Pour certaines questions on rapportera D (ou D_c) aux axes $O_1 XY$:

$$X = x, \quad Y = R - y.$$

Donc U_1 est la somme de $-\frac{3}{2}YU_0$ et d'une fonction harmonique dans D , prenant sur $(Ox + \Sigma)$ les mêmes valeurs que $\frac{3}{2}YU_0$; cette fonction harmonique (supposée unique) ⁽¹⁾ est visiblement :

$$\frac{3}{2}[R(U_0 - 1) + Y],$$

d'où :

$$U_1 = \frac{3}{2}(U_0 - 1)(R - Y).$$

Remarquons également que l'équation générale (16) peut se mettre sous la forme :

$$\Delta U_n = \Delta(YU_{n-1}) - 5 \frac{\partial U_{n-1}}{\partial Y},$$

permettant une expression relativement simple de U_n ⁽²⁾;

— ensuite, dans le cas de la bande inaltérée $0 \leq y \leq R$ correspondant à l'arbre parfaitement cylindrique, on peut calculer les premières approximations ⁽³⁾ et montrer d'ailleurs que la série (15) a pour somme $\left(\frac{y}{R}\right)^4$, solution du problème. Mais la convergence est assez lente ⁽³⁾. S'il en est ainsi pour D (et c'est probable), *les approximations se prêtent mal aux calculs approchés*. La raison en est sans doute que la première U_0 est trop éloignée de la solution;

b) Méthodes analogiques.

Certains phénomènes électriques conduisent à des problèmes se traduisant par les mêmes conditions analytiques que le problème de la torsion, et permettent alors une résolution analogique remarquable.

Par exemple, dans une plaque mince rapportée à deux axes rectangulaires Oxy , en matière homogène, et d'épaisseur h légèrement variable, parcourue par un courant électrique, le potentiel V au point (x, y) est solution de l'équation :

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0.$$

(1) Les questions d'unicité seront traitées plus loin.

(2) P. BROUSSE. — *Sur la torsion des ressorts à boudins*.

(3) On trouve avec $R = 1$, $\gamma = 1$:

$U_0 = (1 - Y),$	$\frac{\partial U_0}{\partial Y} = -1,$
$U_1 = Y(1 - Y) \left(-\frac{3}{2} \right),$	$\frac{\partial U_1}{\partial Y} = -\frac{3}{2} + 3Y,$
$U_2 = Y(1 - Y) \left(-\frac{5}{4} + Y \right),$	$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = -\frac{5}{4} + \frac{9}{2}Y - 3Y^2,$
$U_3 = Y(1 - Y) \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{4}Y - \frac{1}{4}Y^2 \right),$	$\frac{\partial U_3}{\partial Y} = -\frac{5}{8} + \frac{15}{4}Y - \frac{9}{2}Y^2 + Y^3,$
$U_4 = Y(1 - Y) \left(-\frac{1}{16} + \frac{7}{8}Y - \frac{3}{8}Y^2 \right),$	$\frac{\partial U_4}{\partial Y} = -\frac{1}{16} + \frac{15}{8}Y - \frac{15}{4}Y^2 + \frac{3}{2}Y^3,$
$U_5 = Y(1 - Y) \left(\frac{7}{32} + \frac{5}{16}Y - \frac{5}{16}Y^2 \right),$	$\frac{\partial U_5}{\partial Y} = \frac{7}{32} + \frac{3}{16}Y - \frac{15}{8}Y^2 + \frac{5}{4}Y^3,$
$U_6 = Y(1 - Y) \left(\frac{15}{64} - \frac{3}{32}Y - \frac{5}{32}Y^2 \right),$	$\frac{\partial U_6}{\partial Y} = \frac{15}{64} - \frac{21}{32}Y - \frac{3}{16}Y^2 + \frac{5}{8}Y^3.$

Le vecteur courant est $\vec{i} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. Les lignes de courant sont les trajectoires orthogonales des équipotentiellles.

Considérons la portion de D comprise entre les droites $x = 0$, $x = l > q$, et construisons une cuve électrolytique ayant cette forme. Si la profondeur du liquide au point (x, y) est proportionnelle à $\frac{1}{y^3}$ ou à y^3 , l'équation (17) devient identique aux équations (13) et (10). On peut placer les électrodes de façon que les conditions aux limites pour V soient les mêmes que pour la fonction de tension U ou pour l'angle de torsion ψ . On conçoit alors que le tracé expérimental des équipotentiellles et des lignes de courant permette le calcul de la tension grâce aux relations (11) et (12).

Malgré des procédés ingénieux de manipulation et de tracé ⁽¹⁾ ⁽²⁾, la méthode n'est pas rigoureuse : la longueur de la cuve, l , ne peut être infinie; la profondeur sur l'axe ne peut être ni rigoureusement nulle, ni infinie; le taux de variation de h est appréciable et l'on peut se demander si l'équation (17) régit toujours le phénomène;

c) Mesures directes.

On peut également mesurer les déformations locales à l'aide d'un extensomètre. Il semble qu'on puisse ainsi atteindre directement les grandeurs à mesurer. Mais l'extensomètre est d'un maniement délicat, et il faudrait étudier la précision de la méthode.

Malgré tout, l'étude d'une poutre avec gorge semi-circulaire (domaine D_c) par le calcul analogique et par les mesures extensométriques a donné des résultats très intéressants. Le cas le plus célèbre est celui où $\frac{p}{R} = \frac{1}{8}$. Les expériences ont été faites notamment par l'École allemande ⁽³⁾ et par SALET ⁽²⁾. On donne une forme simple à ces résultats en utilisant la notion de *facteur de concentration de tension c* (formziffer, stress-concentration-factor); soit M un point de Σ situé à la distance y_0 de l'axe Ox. La valeur de c en M est le rapport de la tension en ce point à la tension sur la surface du cylindre de rayon y_0 soumis au même couple de torsion. Pour ce cylindre parfait soumis au couple $M = 2\pi U a$ la valeur $\left(\frac{y}{y_0}\right)^4$ ⁽⁴⁾. La relation (12) montre alors que la valeur de c au sommet S est :

$$(18) \quad c_s = -\frac{1}{4} \left(\frac{dU}{dn} \right)_s (R - p).$$

Les principaux résultats expérimentaux pour c_s sont :

1,83, THUM et BAUTZ, méthode analogique;

(1) MALAVARD. — *Application des analogies électriques à la solution de quelques problèmes de l'hydrodynamique*. Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, 1934.

MALAVARD. — *Étude de quelques problèmes techniques relevant de la théorie des ailes. Application à leur solution de la méthode rhéoelectrique*. Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, 1939.

(2) SALET. — *Détermination des pointes de tension dans les arbres de révolution soumis à torsion au moyen d'un modèle électrique*. Association Technique Maritime et Aéronautique, juin 1936.

SALET. — *Amélioration de la méthode de détermination des pointes de tension dans les arbres de révolution soumis à torsion au moyen d'un modèle électrique*. Association Technique Maritime et Aéronautique, juin 1937.

(3) THUM et BAUTZ. — ZVDI 1935, p. 1303.

Dr W. HEROLD. — VDI Zeitschrift 1937, Bd 81, n° 18, pp. 505-509.

(4) La question de l'unicité sera résolue plus loin.

1,575, SALET, méthode analogique;

1,545, SALET, mesures à l'extensomètre.

La concordance des deux derniers nombres est remarquable;

d) *Calcul numérique.*

Enfin, la méthode récente de calcul numérique (relaxation) indiquée par les auteurs américains ⁽¹⁾ constitue un net progrès. L'équation (13) est remplacée par une équation aux différences finies. On procède par itération, « améliorant » peu à peu la valeur de U aux sommets d'un réseau tracé sur D . Les calculs sont longs, mais des résultats complets ont été donnés pour un arbre particulier.

3 Nous nous proposons de reprendre le problème à la base et d'en faire une étude mathématique rigoureuse. De nombreuses propriétés restent en effet à démontrer (à notre connaissance). En particulier, on ne sait rien, *a priori*, de l'existence et du nombre des fonctions U ; les méthodes classiques ne s'appliquent pas à ce problème de Dirichlet pour les deux raisons suivantes :

a) le domaine D est infini;

b) le coefficient $\frac{3}{y}$ de l'équation (13) est infini sur Ox .

De fait, on est obligé d'imposer à U d'autres conditions pour en assurer l'unicité : nous supposons cette fonction régulière à l'intérieur de D et bornée à l'infini.

D'autre part, même si la fonction U existe et si elle est unique, on ne peut affirmer, *a priori*, qu'elle a une dérivée normale sur $(Ox + \Sigma)$. Dans le cas où cette dérivée existe, il se peut encore que la tension $-\frac{1}{y^2} \frac{dU}{dn}$ soit infinie sur Ox ; ce ne serait pas physiquement acceptable.

Enfin, admettant que les expressions (12) et (18) aient un sens, il serait intéressant d'étudier la tension le long de Σ et particulièrement à l'infini, aux coins A et B , et surtout au sommet S .

Ces questions essentielles seront résolues dans ce travail, ainsi que plusieurs autres points.

Avant de commencer cette étude il nous faut préciser certaines notations et certaines hypothèses. Nous désignerons par D l'intérieur du domaine, par D^* sa frontière (points à l'infini compris). Dans le cas où l'entaille n'existe pas (arbre parfaitement cylindrique), D et D^* s'appelleront D_i et D_i^* ; ils deviendront D_c et D_c^* lorsque Γ est un demi-cercle Γ_c . Le problème de la détermination de U s'appellera $\mathfrak{P}$.

Notons également quelques simplifications et quelques généralisations. D'après (8), $2\pi\gamma$ est le moment du couple s'exerçant sur une section transversale. Soient γ_1, γ_2 deux valeurs de γ , $U_1(x, y)$ une solution correspondant à γ_1 . La fonction $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} U_1$ est une solution pour la valeur γ_2 de la constante. Les solutions pour γ quelconque sont donc proportionnelles à γ . Nous pouvons donc bien prendre $\gamma = 1$.

(1) SHORTLEY, WELLER, DARBY, GAMBLE. — *Numerical Solution of Axisymmetrical Problems, with Applications to Electrostatics and Torsion*. Journal of Applied Physics, January 1947.

D'une manière analogue, on voit qu'avec un changement préalable d'unité de longueur on peut prendre pour R un nombre quelconque. Les valeurs les plus commodes pour la suite sont $R = \pi$ et $R = 1$.

D'autre part, nous utiliserons aussi les équations :

$$(19) \quad \Delta F(x, y) = \frac{15}{4y^2} F(x, y);$$

$$(20) \quad \Delta S(x, y) = -\frac{5}{y} \frac{\partial S(x, y)}{\partial y},$$

transformés de (13) par les changements ⁽¹⁾ :

$$(21) \quad \underline{U = y^{3/2} F, \quad U = y^4 S.}$$

Comme des problèmes analogues interviennent dans d'autres questions, avec peut-être d'autres coefficients numériques, il est intéressant de généraliser le plus possible. Aussi, envisagerons-nous directement le problème $\mathcal{P}$ au cas de l'équation :

$$(22) \quad \Delta U = \frac{k}{y} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (k, \text{ constante positive})$$

qui, par les transformations :

$$(23) \quad \underline{U = y^{k/2} F;}$$

$$(24) \quad U = y^{k+1} S,$$

devient :

$$(25) \quad \underline{\Delta F = \frac{\lambda}{y^2} F} \quad \left[\lambda = \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \right];$$

$$(26) \quad S = -\frac{k+2}{y} \frac{\partial S}{\partial y}.$$

Nous avons déjà signalé que dans le cas du domaine D_i , le problème $\mathcal{P}$ avait une solution : $\left(\frac{y}{R}\right)^{k+1}$. Or, vis-à-vis de l'équation (22), les domaines D et D_i sont les mêmes éléments singuliers : les points de Ox et les points à l'infini. Aussi, est-il logique de retrancher $\left(\frac{y}{R}\right)^{k+1}$ de U ⁽²⁾. Cela nous amène à poser :

$$(27) \quad \underline{U = \left(\frac{y}{R}\right)^{k+1} + \left(\frac{y}{R}\right)^{k/2} f(x, y).}$$

(1) S est la stress-concentration-function. SHORTLEY, WELLER, DARBY, GAMBLE. — *Numerical solution of Axisymmetrical Problems...* (Déjà cité).

(2) Cela revient à prendre $\left(\frac{y}{R}\right)^{k+1}$ comme première approximation. A rapprocher de ce qui a été remarqué à propos de la convergence des approximations successives [I, 2, a)].

La fonction f sera solution de l'équation (25) et prendra sur Σ la valeur :

$$(28) \quad \varphi(y) = \frac{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^{k+1}}{\left(\frac{y}{R}\right)^{k/2}}.$$

Nous généraliserons même au cas où :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(y) \text{ est une fonction définie et dérivable dans l'intervalle: } R - p \leq y \leq R, \\ \text{nulle pour } y = R \text{ et positive dans le reste de l'intervalle.} \end{array} \right.$$

De ces considérations, nous extrayons l'énoncé définitif des deux problèmes suivants qui seront résolus dans la deuxième partie de ce travail :

a) *montrer qu'il existe dans D une fonction $U(x, y)$ et une seule, régulière, bornée à l'infini, solution de l'équation (22) et prenant ⁽¹⁾ les valeurs zéro sur Ox et un sur Σ (problème $\mathcal{P}$);*

b) *montrer qu'il existe dans D une fonction $f(x, y)$ unique, régulière, bornée à l'infini, solution de l'équation (25), prenant ⁽¹⁾ sur Ox la valeur zéro et sur Σ la valeur $\varphi(y)$ définie par (28) et, d'une façon plus générale, par (29) (problème $\mathcal{P}'$).*

Ces deux problèmes ne sont pas, *a priori*, complètement équivalents [naturellement, dans le cas où $\varphi(y)$ est donnée par (28)].

En effet, lorsque le point $M(x, y)$ tend vers un point fixe de Ox , toute solution de $\mathcal{P}$ tend vers zéro par hypothèse. La relation (27) ne permet pas, à elle seule, de prévoir ce que devient f dans ces conditions. L'étude des propriétés des solutions des deux problèmes permettra de résoudre automatiquement cette difficulté.

Dans la troisième partie, nous nous placerons plus particulièrement dans le cas de la torsion [$k = 3$, $\varphi(y)$ donné par (28)] et nous étudierons les dérivées normales et les tensions.

Nous commencerons par l'étude de certaines propriétés du domaine D , relatives à la représentation conforme, aux fonctions harmoniques et à la fonction de Green.

(1) On dit que la fonction $U(M)$ définie dans $(D + Ox + \Sigma)$ prend la valeur L au point M_0 de $(Ox + \Sigma)$ si elle tend vers L lorsque le point M de $(D + Ox + \Sigma)$ tend vers M_0 de quelque façon que ce soit.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DU DOMAINE D

A. — REPRÉSENTATION CONFORME

1 On peut faire la représentation conforme de la bande D_i ($0 < Y < R$) sur le demi-plan $D' : \Im z' > 0$, ($z' = x' + iy'$), de façon que les points C ($X = \infty$), E ($X = -\infty$),

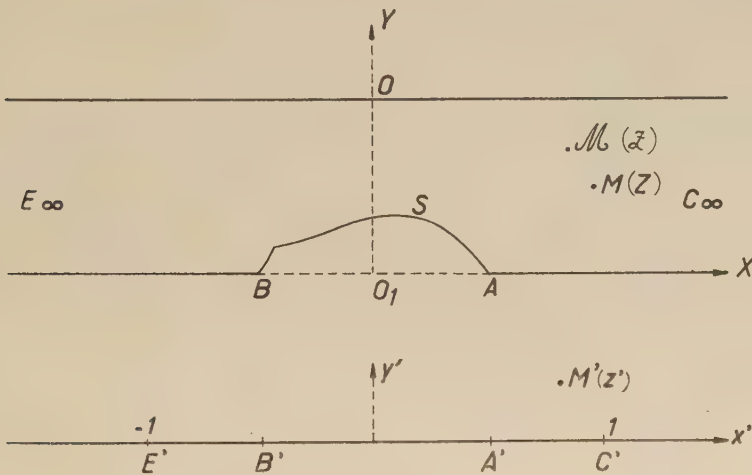


Fig. 2

O ($X = 0$, $Y = R$) aient pour homologues respectifs C' ($z' = 1$), E' ($z' = -1$), O' ($z' = \infty$) (fig. 2). Si le point $\mathcal{M}$ ($\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i \mathfrak{y}$) de D_i vient en M' (z') on sait que l'on a :

$$(30) \quad \mathfrak{z} = \frac{R}{\pi} \operatorname{Log} \frac{1+z'}{1-z'},$$

ou :

$$(31) \quad z' = \operatorname{th} \frac{\pi \mathfrak{z}}{2R}.$$

D se transforme alors en un domaine que l'on peut à nouveau représenter sur le demi-plan D' , en conservant les points C' , E' , O' . Ainsi, on peut faire la représentation conforme de D sur D' , de façon que les trois points C, E, O aient pour homologues C' , E' , O' respectivement.

Soit :

$$(32) \quad Z = Z(z')$$

la fonction faisant l'application conforme de D' sur D , M ($Z = X + iY$) étant l'homologue de M' . Alors la fonction :

$$(33) \quad Z = Z\left(\operatorname{th} \frac{\pi x}{2R}\right)$$

transforme de la même façon la bande D_i en le domaine D .

2 PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $Z(z')$ DANS LE VOISINAGE DE C' (ET PAR SUITE DE E').

Considérons l'expression :

$$(34) \quad e^{-\frac{\pi}{R}z(z')},$$

fonction de $M'(z')$. A l'intérieur de D' , elle est holomorphe. Sur le segment de droite $A'C'$ (A' , homologue de A), elle est réelle, positive et continue; sur la demi-droite $C'x'$ ($y' = 0$, $x' > 1$), elle est réelle, négative et continue. Enfin, si le point M' , intérieur à D' ou situé sur la demi-droite $A'C'x'$, tend vers C' , elle tend vers zéro. Donc, elle est prolongeable analytiquement à travers la demi-droite $A'C'x'$ (extrémités exclues), et, dans le voisinage de C' l'on a :

$$(35) \quad e^{-\frac{\pi}{R}z(z')} = (z' - 1) \left[-\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z' - 1)^n \right],$$

β_0 , β_n étant des constantes réelles avec $\beta_0 > 0$, et par suite :

$$(36) \quad Z(z') = -\frac{R}{\pi} \left[\operatorname{Log} (1 - z') + \operatorname{Log} \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n (z' - 1)^n \right]$$

(les β'_n sont constants, $\operatorname{Log} \beta_0$ est réel; $\operatorname{Log} (1 - z')$ est réel sur $A'C'$).

On en déduit les résultats suivants :

a) lorsque le point M de $(D + D^*)$ tend vers C d'une façon quelconque, la longueur du segment de droite $M'C'$ est le produit de $e^{-\frac{\pi}{R}x}$ par une fonction tendant vers une limite finie non nulle (indépendante de la façon dont M tend vers C);

b) supposons que M tende vers C sur une parallèle à $O_1 X : Y = Y_0$ ($0 \leq Y_0 \leq R$). Le point M' d'ordonnée positive ou nulle tend vers C' suivant un arc de courbe ayant en C' une demi-tangente faisant avec la demi-droite $C'A'$ l'angle $\frac{\pi}{R} Y_0$ (1).

(1) C'est une généralisation, dans ce cas particulier, de la propriété indiquée par CARATHÉODORY : *Conformal representation*, 1932, pp. 91 et suiv. (transformation of corners).

On trouve des propriétés analogues lorsque M tend vers E.

Propriété du vecteur $\overrightarrow{\mathbb{M}M}$ lorsque M s'éloigne indéfiniment.

Appliquons la relation (36) à la fonction (30). On trouve $\beta_0 = \frac{1}{2}$ et des constantes β'_n en général différentes des précédentes. Par soustraction de la relation obtenue et de (36) on obtient :

$$Z - \mathfrak{Z} = \frac{R}{\pi} \left[\text{Log} \frac{1}{2\beta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta''_n (z' - 1)^n \right] \quad (\beta''_n, \text{ constantes}).$$

Donc, lorsque M tend vers C, la différence $Z - \mathfrak{Z}$ tend vers $\frac{R}{\pi} \text{Log} \frac{1}{2\beta_0}$, constante réelle.

Dans la représentation conforme de D_i sur D, comme il est dit ci-dessus, le vecteur $\overrightarrow{\mathbb{M}M}$ sera dit *vecteur transformation* en M. Ce vecteur tend vers un vecteur fixe, parallèle à l'axe réel, lorsque M tend vers C (ou vers E).

3 PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION $Z(z')$ DANS LE VOISINAGE D'UN POINT DE L'AXE x' , AUTRE QUE C' ET E' .

Soit M'_0 un point fixe de l'axe x' , distinct de C' et de E' , et soit M_0 le point homologue sur $(Ox + \Sigma)$. En passant par l'intermédiaire de la représentation conforme sur un cercle et en utilisant des résultats connus (1), on obtient la forme de $Z(z')$ dans le voisinage de M'_0 .

Supposons d'abord le point M_0 sur l'un des arcs constitutifs de $(Ox + \Sigma)$, extrémités exclues. Lorsque M' tend vers M'_0 , le rapport :

$$(37) \quad \frac{Z - Z_0}{z' - z'_0}$$

tend vers une limite, finie, non nulle, qui est la limite de la dérivée $\frac{dZ}{dz'}$ en M'_0 .

Si en M_0 se rejoignent deux arcs qui se coupent en ce point sous l'angle $\nu\pi$ ($0 < \nu \leq 2$), compté à l'intérieur de D (fig. 3), le rapport :

$$(38) \quad \frac{Z - Z_0}{(z' - z'_0)^\nu}$$

tend également vers une limite finie et non nulle. Dans le voisinage de M'_0 , homologue d'un tel point M_0 , on a :

$$(39) \quad \frac{dZ}{dz'} = (z' - z'_0)^{\nu-1} \chi(z'),$$

la fonction $\chi(z')$ est régulière et $\chi(z'_0)$ est différent de zéro.

(1) VILLAT. — *Mécanique des fluides*, 1938, pp. 98-99.

En particulier, si l'angle en A est droit, on a dans le voisinage de A' ($z' = a$, réel et positif), homologue de ce point :

$$(40) \quad \frac{dZ}{dz'} = \frac{1}{\sqrt{z' - a}} \cdot \chi(z').$$

$\chi(a)$, différent de zéro, est la limite de $\frac{Z - q}{2\sqrt{z' - a}}$ lorsque z' tend vers a . C'est un nombre réel positif (1).

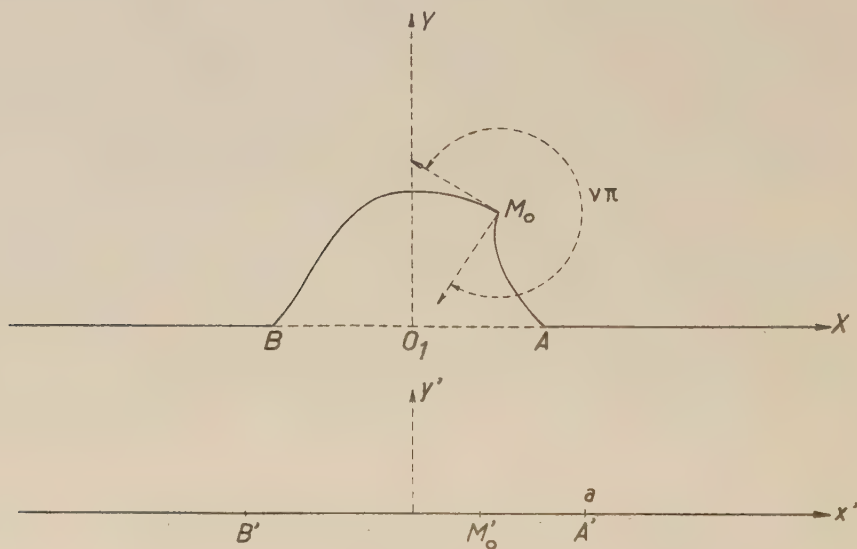


Fig. 3

B. — FONCTIONS HARMONIQUES

Soit $v(x, y)$ une fonction de $M(x, y)$ harmonique en tout point de D, prenant sur Ox et sur Σ des valeurs $v^*(M)$ formant deux suites continues, et telle que le rapport $\frac{v(x, y)}{x^2}$ tende vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment dans D. Une telle fonction sera dite du type $\mathcal{Q}$.

1 Supposons d'abord, que v s'annule en tout point de $(Ox + \Sigma)$. Soit l un nombre supérieur à q . Désignons par D_l la partie commune à D et à la bande $-l < x < l$, par D_l^* sa frontière. Dans D_l , la fonction :

$$V(x, y) = \varepsilon(x^2 + R^2 - y^2) \quad (\varepsilon, \text{constante positive})$$

(1) On pourrait également, dans le cas où l'arc Γ_1 de Γ aboutissant en A, soit IA, est un arc de cercle, utiliser comme DARBOUX (*Théorie des surfaces*, 1887, t. 1, p. 180) une inversion-symétrie. Une généralisation s'obtient en supposant les arcs analytiques et en effectuant des prolongements (VALIRON, *Théorie des fonctions*, 1948, pp. 439 et suiv.). Les hypothèses prises dans le texte sont plus générales.

est harmonique et positive. Or, lorsque M s'éloigne indéfiniment dans D , le rapport $\frac{v(x, y)}{x^2 + R^2 - y^2}$ tend vers zéro d'après l'hypothèse. Donc, on peut trouver l suffisamment grand, pour que les deux fonctions :

$$(41) \quad V(x, y) - v(x, y), \quad V(x, y) + v(x, y)$$

soient positives sur les segments de droites ($0 \leq y \leq R$; $x = \pm l$). Sur le reste de D_l^* , v est nulle et V positive. Donc, sur D_l entier, les fonctions (41) sont positives. Par suite, en tout point de $(D_l + D_l^*)$, on a $V \pm v > 0$, c'est-à-dire :

$$|v(x, y)| < \varepsilon (x^2 + R^2 - y^2).$$

Soit maintenant $M_0(x_0, y_0)$ un point quelconque de D . A tout nombre positif ε_1 , faisons correspondre ε tel que l'on ait :

$$\varepsilon (x_0^2 + R^2 - y_0^2) < \varepsilon_1.$$

On peut déterminer un domaine D_l contenant M_0 . On a alors :

$$|v(x_0, y_0)| < \varepsilon_1;$$

et comme ε_1 est arbitraire, $v(x_0, y_0)$ est nulle.

Ainsi, la fonction v est nulle en tout point de D (1).

2 On en déduit la propriété suivante :

— *il n'existe pas plus d'une fonction du type $\mathcal{V}$, prenant sur $(Ox + \Sigma)$ des valeurs $v^*(M)$ données (2).*

En effet, la différence de deux de ces fonctions est aussi du type $\mathcal{V}$, elle s'annule en tout point de $(Ox + \Sigma)$; donc, d'après ce qui précède, elle est identiquement nulle.

3 Prenons le cas où $v^*(M)$ tend vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment sur Ox et sur Σ . Faisons la transformation conforme de D sur le cercle unité D_2 , $|z_2| < 1$, les points C, E , ayant pour homologues $C_2(z_2 = 1), E(z_2 = -1)$. Dans cette transformation v devient une fonction $v_2(x_2, y_2)$ harmonique dans D_2 et prenant sur le contour entier D_2^* de D_2 , une suite continue de valeurs. Si cette suite v_2^* est donnée, on sait que $v_2(x_2, y_2)$

(1) On peut démontrer une propriété un peu moins générale en faisant la représentation conforme sur le cercle unité D_2 (voir § 3). $v(x, y)$ devient une fonction $v_2(x_2, y_2)$, harmonique dans D_2 , prenant la valeur zéro sur la circonférence D_2^* , sauf peut-être en C_2, E_2 . On déduit de [II, A, 2] que $z_2 - 1 = e^{-\frac{\pi Z}{R}} K(Z)$, $K(Z)$ étant une fonction qui tend vers une limite finie non nulle lorsque X tend vers $+\infty$. Supposons que $\frac{v}{x}$ tende vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment dans D ; alors le rapport :

$$\frac{v_2(x_2, y_2)}{\text{Log } C_2 M_2} = \frac{v(x, y)}{-\frac{\pi}{R} X + \text{Log } |K|}$$

tend vers zéro, et l'on est ramené au théorème classique de Zaremba (GOURSAT, *Analyse*, 1942, t. III, pp. 205-206). On obtient une propriété analogue en E_2 . La fonction v_2 est identiquement nulle dans D_2 . Il en est de même de v dans D .

(2) Les fonctions $A e^{\frac{\pi}{R} X} \sin \frac{\pi}{R} Y$ (A , constantes) possèdent, pour D_l , les propriétés des fonctions du type $\mathcal{V}$, sauf lorsque x tend vers $+\infty$. Le théorème d'unicité ne s'applique évidemment pas à ce cas.

existe et qu'elle est unique. Lorsque $M_2(x_2, y_2)$ de D_2 tend vers C_2 ou E_2 , $v_2(M_2)$ tend vers zéro. D'autre part, si $v_2^*(M_2)$ est positive ou nulle, la fonction v_2 est positive dans D_2 . D'où :

— toute fonction du type $\mathcal{V}$ telle que $v^*(M)$ tende vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment sur $(Ox + \Sigma)$ est déterminée par la connaissance de $v^*(M)$. Si $v^*(M)$ est positive ou nulle, la fonction est positive dans D .

4 Supposons maintenant que $v^*(M)$ tende vers des constantes, par exemple vers 0 et vers 1 respectivement, lorsque M s'éloigne indéfiniment sur Ox et sur Σ . Retranchons $\frac{y}{R}$ de la fonction v . On est ramené au paragraphe 3. D'où :

— il existe une fonction unique, du type $\mathcal{V}$, telle que $v^*(M)$, supposée donnée, tende vers 0 et vers 1 lorsque M s'éloigne indéfiniment sur Ox et sur Σ . Cette fonction est la somme de $\frac{y}{R}$ et d'une fonction qui tend vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment.

5 Gardons les hypothèses du paragraphe 4 et supposons que M s'éloigne indéfiniment sur une droite fixe parallèle à Oy et d'ordonnée y . Le point M_2 de D_2 tend vers C_2 , par exemple, suivant une courbe ayant une demi-tangente $C_2\Gamma_2$ en C_2 . La fonction v_2 tend vers $\frac{y}{R}$ d'après ce qui précède, et d'après un résultat classique ⁽¹⁾ vers le quotient par π de l'angle saillant $\Gamma_2 C_2 \eta_2$ ($C_2 \eta_2$ est la demi-tangente en C_2 au demi-cercle transformé de Ox). Cet angle est donc égal à $\frac{\pi}{R} y$.

On retrouve un résultat obtenu (pour un demi-plan) par une autre méthode [II, A, 2, b)].

6 En particulier, il existe une fonction du type $\mathcal{V}$, et une seule, prenant les valeurs zéro sur Ox et un sur Σ , soit U_0 ⁽²⁾. Les fonctions :

$$U_0 - \frac{y}{R}, \quad \frac{y}{R-p} - U_0,$$

toujours du type $\mathcal{V}$, sont positives ou nulles sur $(Ox + \Sigma)$, donc [3], elles sont positives dans D . Par suite, on a :

$$(42) \quad \frac{y}{R} \leq U_0 \leq \frac{y}{R-p} \quad \text{dans} \quad (D + D^*).$$

En particulier, si p tend vers 0, U_0 tend vers $\frac{y}{R}$ qui est la fonction U_0 correspondant à la bande D_i .

7 Soit $\frac{D}{2}$ la partie de D où x est positif. Dans $\frac{D}{2}$, la fonction :

$$(43) \quad se^{-\frac{x}{R}} \sin \frac{y}{R} - \left(U_0 - \frac{y}{R} \right) \quad (s, \text{ constante positive})$$

(1) Par exemple : GOURSAT, *Analyse*, t. III, 1942, pp. 205 et suiv.

(2) C'est la fonction U_0 déjà rencontrée [Origine et énoncé du problème [2], approximations successives, a)].

est harmonique; elle est nulle à l'infini d'après le paragraphe 3. Une représentation conforme de $\frac{D}{2}$ sur le cercle unité montre, comme à ce paragraphe, que la fonction (43) prend ses valeurs extrêmes sur le bord. Sur les demi-droites Ox , AC , elle est visiblement positive ou nulle. Sur l'arc AS et sur le segment SO , elle est supérieure à :

$$se^{-\frac{q}{R}} \sin \frac{y}{R} - \frac{p}{R-p} \cdot \frac{y}{R}.$$

Or, pour $0 \leq y \leq R$, $\sin \frac{y}{R}$ est supérieur à $0,8 \frac{y}{R}$. En prenant :

$$(44) \quad s \geq \frac{p}{R-p} e^{\frac{q}{R}},$$

la fonction (43) est positive ou nulle sur ASO . Donc, elle est positive dans $\frac{D}{2}$. On obtient ainsi :

$$0 \leq U_0 - \frac{y}{R} \leq se^{-\frac{|x|}{R}} \sin \frac{y}{R}$$

et, *a fortiori* :

$$(45) \quad 0 \leq U_0 - \frac{y}{R} \leq se^{-\frac{|x|}{R}} \frac{y}{R} \quad (\text{dans } D + D^*),$$

s étant donné par (44).

Application numérique.

Pour $\frac{p}{R} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{q}{R} \leq \frac{1}{3}$, on peut prendre $s \geq 1$.

8 Soit plus généralement une fonction $v(x, y)$ du type $\mathcal{V}$ s'annulant sur Ox et sur les demi-droites Θ et prenant sur l'arc Γ la valeur $v(M) = \varphi(y)$, $\varphi(y)$ étant la fonction définie par (28) ou (29). Si $\varphi(y)$ est donnée, la fonction $v(x, y)$ que nous appellerons désormais $h(x, y)$ ⁽¹⁾ existe, elle est unique, elle est positive dans D .

$\varphi(y)$ est bornée dans l'intervalle $(R-p \leq y \leq R)$, elle a pour $y = R$ une dérivée (finie); donc on peut trouver une constante positive s' telle que :

$$(46) \quad \varphi(y) \leq s' \left(1 - \frac{y}{R}\right),$$

dans l'intervalle fermé $(R-p, R)$. La fonction :

$$(47) \quad s' \left(U_0 - \frac{y}{R}\right) - h$$

(1) Cette fonction h joue un rôle important dans la suite.

du type $\mathcal{V}$, prend des valeurs positives ou nulles sur $(Ox + \Sigma)$. Donc, on a :

$$(48) \quad 0 \leq h \leq s' \left(U_0 - \frac{y}{R} \right) \quad \text{dans} \quad (D + D^*),$$

et en tenant compte de la relation (45) :

$$(49) \quad 0 \leq h \leq ss' e^{-\frac{|x|}{R}} \frac{y}{R}.$$

En particulier h s'annule à l'infini, comme $e^{-\frac{|x|}{R}}$ au moins.

D'autre part, si p tend vers zéro, U tend vers $\frac{y}{R}$; donc h tend vers zéro en tout point de D . La fonction h est ainsi une fonctionnelle continue de l'arc Γ lorsque celui-ci tend vers le segment de droite AB .

C. — FONCTION DE GREEN. — DOMAINES Δ_n

1 Soient $M(x, y; X, Y)$ un point de D , $P(\xi, \eta; \xi_1 = \xi, \eta_1 = R - \eta)$ un point quelconque. La fonction de Green de D sera une fonction $G(M, P)$ de P , définie dans $(D + D^*)$, égale dans D à la somme d'une fonction harmonique et de $\text{Log} \frac{1}{MP}$, et qui tend vers zéro lorsque le point P de D tend vers un point de $(Ox + \Sigma)$ ou s'éloigne indéfiniment.

Utilisons la représentation conforme (32) de D sur le demi-plan D' . Soient $M'(z' = x' + iy')$, $P'(\zeta' = \xi' + i\eta')$ les homologues de $M(z)$ et de $P(\zeta)$. Transformons, de même, la fonction :

$$(50) \quad G'(M', P') = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{(\xi' - x')^2 + (\eta' + y')^2}{(\xi' - x')^2 + (\eta' - y')^2},$$

partie réelle de :

$$(51) \quad \Lambda = \text{Log} \frac{\zeta' - \bar{z}'}{\bar{\zeta}' - z'} \quad (\bar{z}', \text{ imaginaire conjugué de } z').$$

On obtient une fonction de P (et de M), $G(M, P)$ qui est la somme d'une fonction harmonique et de $\text{Log} \frac{1}{MP}$ (1). D'autre part, lorsque P tend vers un point de D , à distance finie ou à l'infini, P' tend vers un point de l'axe x' ; G' et, par la suite G , tendent vers zéro. Finalement, la fonction obtenue G possède les propriétés de la définition.

Montrons que c'est la seule fonction possédant ces propriétés. La différence entre une telle fonction et $\text{Log} \frac{1}{MP}$ est une fonction $\omega(M, P)$ harmonique dans D et prenant sur $(Ox + \Sigma)$ la valeur $\text{Log} MP$. Lorsque, M restant fixe, le point P s'éloigne indéfiniment,

(1) GOURSAT, déjà cité, p. 223.

le rapport $\left| \frac{\omega(M, P)}{\xi} \right|$ est équivalent à $\left| \frac{\text{Log}|\xi|}{\xi} \right|$, il tend vers zéro. $\omega(M, P)$, fonction harmonique de P , est du type γ . Elle prend sur $(Ox + \Sigma)$ des valeurs formant deux suites continues données. Donc, elle est unique [II, B, 2].

2 D'après sa formation (50), la fonction G est symétrique par rapport aux deux points M et P ; elle est positive lorsque M et P sont intérieurs à D . Étudions son comportement à l'infini.

Supposons que M reste dans le domaine D_l [II, B, 1], l fixe. M' reste dans le domaine homologue D' de frontière D'^* . Les points C' et E' sont extérieurs à $D'_l + D'^*$. Lorsque ξ tend vers $+\infty$ par exemple, P' tend vers C' . Or, la fonction Λ (51) a une dérivée en C' :

$$(52) \quad \left(\frac{d\Lambda}{d\xi'} \right)_{C'} = \frac{\bar{z}' - z'}{(1 - z')(1 - \bar{z}')} = \frac{-2iy'}{(1 - x')^2 + y'^2}.$$

Donc, dans le voisinage de C' , le rapport $\frac{G'}{\eta'}$ reste fini. Mais, lorsque P tend vers C , le produit $\eta' e^{\frac{\pi}{R}\xi}$ reste fini [II, A, 2]. D'où la propriété :

— M restant dans D_l , la fonction de Green $G(M, P)$ est le produit de $e^{-\frac{\pi}{R}|\xi|}$ par une fonction restant finie lorsque P s'éloigne indéfiniment.

Toujours dans les mêmes conditions, la relation (35) montre que $\frac{d\xi'}{d\xi_1}$ est le produit de $e^{-\frac{\pi}{R}\xi_1}$ par une fonction holomorphe autour de C' . En confrontant ce résultat avec la dérivée (52), on obtient :

— M restant dans D_l , chacune des dérivées $\frac{\partial G}{\partial \xi}, \frac{\partial G}{\partial \eta}$ est le produit de $e^{-\frac{\pi}{R}|\xi|}$ par une fonction restant finie lorsque P s'éloigne indéfiniment.

3 Supposons maintenant que M reste dans un domaine T complètement intérieur à D , et que P tende vers un point P^0 de Ox . Alors P' tend vers un point P'^0 de $C'x'$ par exemple, et la fonction (50) est équivalente à $\frac{2\eta'y'}{(\xi' - x')^2 + y'^2}$. Mais, d'après [II, A, 3], le rapport $\frac{\eta'}{\eta}$ tend vers une limite finie différente de zéro, donc :

— M restant dans un domaine fixe intérieur à D , le rapport $\frac{G}{\eta}$ reste fini lorsque P tend vers un point de Ox (1).

4 La méthode de calcul de G à partir de D' s'applique à la fonction de Green $G_i(M, P)$ de la bande inaltérée D_i . On trouve, en prenant, par exemple, $R = \pi$:

$$(53) \quad G_i(M, P) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\text{ch}(\xi - x) - \cos(\eta + y)}{\text{ch}(\xi - x) - \cos(\eta - y)}.$$

(1) Pour démontrer cette propriété, on peut également utiliser l'existence de la dérivée normale de G (voir plus loin).

La différence $G_i - G$ ⁽¹⁾ est une fonction harmonique de P en tout point de D , même en M . Elle est nulle sur les parties rectilignes du contour et à l'infini; elle prend des valeurs positives et en succession continue sur l'arc Γ . Elle est donc positive en tout point de D .

Par suite, dans $(D + D^*)$, on a :

$$(54) \quad G \leq \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\text{ch}(\xi - x) - \cos(\eta + y)}{\text{ch}(\xi - x) - \cos(\eta - y)}, \quad \text{avec} \quad R = \pi.$$

On obtient de même la suite d'inégalités valables dans $(D + D^*)$:

$$G \leq \frac{1}{2} \text{Log} \left[1 + \frac{2 \sin y \cdot \sin \eta}{\text{ch}(\xi - x) - \cos(\eta - y)} \right] \\ \leq \frac{\sin y \cdot \sin \eta}{\text{ch}(\xi - x) - \cos(\eta - y)} \leq \frac{\sin y \cdot \sin \eta}{\text{ch}(\xi - x) - 1}, \quad \text{avec} \quad R = \pi.$$

5 Les propriétés précédentes peuvent être généralisées à une fonction $\mathcal{C}(P)$ nulle sur $(D + D^*)$, de la forme $\omega(P) + \sum_n \text{Log} \frac{1}{PM_n}$, $\omega(P)$ étant harmonique et M_n étant des points fixes intérieurs à D et en nombre fini. Cette fonction existe, elle est unique; et à l'infini, elle est le produit de $e^{-\frac{\pi}{R}|\xi|}$ par une fonction restant finie. De plus, elle est positive ou nulle et, si $R = \pi$, au plus égale à :

$$\sum_n \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\text{ch}(\xi - x_n) - \cos(\eta + y_n)}{\text{ch}(\xi - x_n) - \cos(\eta - y_n)}$$

(x_n, y_n) sont les coordonnées de M_n .

6 Enfin, on peut donner l'interprétation suivante de la différence $G_i - G$:

— effectuons les représentations conformes, sur le cercle unité de D et de D_i , de façon que M ait dans les deux cas le centre J du cercle pour homologue, P ayant pour transformés respectivement P' et P'_i . Remarquons que, lorsque P décrit D , P'_i ne décrit pas le cercle en entier. On voit facilement que G et G_i sont les parties réelles de :

$$-\text{Log} \overrightarrow{JP'}, \quad \text{et de} \quad -\text{Log} \overrightarrow{JP'_i},$$

d'où :

$$G_i - G = \text{Log} \frac{JP'}{JP'_i}.$$

7 Dans le cas de D_c , on peut trouver une nouvelle borne de G_c en comparant avec le domaine $\mathcal{D}_c$:

$$Y > 0, \quad X^2 + Y^2 - q^2 > 0.$$

(1) On peut également démontrer l'existence et l'unicité de G en démontrant les mêmes propriétés pour $G_i - G$.

Soient M_1 l'inverse de M dans l'inversion (O_1, q^2) , $\overline{M}_1$ et $\overline{M}$ les symétriques de ces points par rapport à $O_1 X$. La fonction de Green pour $\mathcal{D}_c$ est :

$$\mathcal{G}_c = \text{Log} \frac{PM_1 \cdot \overline{PM}}{PM \cdot \overline{PM}_1}.$$

La différence $\mathcal{G}_c - G_c$ est une fonction harmonique de P du type $\mathcal{V}$ dans tout D_c . Elle est positive ou nulle sur D_c^* . Donc, on a :

$$(55) \quad G_c \leq \text{Log} \frac{PM_1 \cdot \overline{PM}}{PM \cdot \overline{PM}_1} \quad \text{dans} \quad (D_c + D_c^*).$$

8 LES DOMAINES Δ_n .

Pour résoudre le problème de Dirichlet $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}'$, il est intéressant d'isoler les points de Ox et les points à l'infini. Nous le ferons en utilisant les domaines suivants (fig. 4).

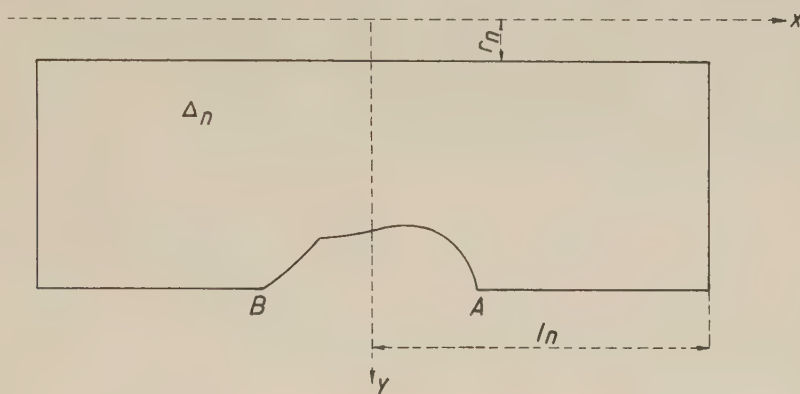


Fig. 4

Une parallèle à Ox , d'ordonnée r , entièrement contenue dans D , et deux parallèles à Oy d'abscisses $\pm l$ ($l > q$), limitent sur D un domaine ayant Γ pour arc frontière, dont l'intérieur sera désigné par Δ et la frontière par Δ^* . Nous considérerons des valeurs croissantes de $l : l_1, l_2, \dots, l_n$, auxquelles nous ferons correspondre des valeurs décroissantes de $r : r_1, r_2, \dots, r_n$, de façon que lorsque n augmente indéfiniment, il en soit de même de l_n et de $\frac{1}{r_n}$.

On peut généraliser, pour certaines fonctions, le théorème de Harnack au domaine infini D . Reprenons les notations du paragraphe 8 des fonctions harmoniques. Il existe une fonction unique, $h_n(x, y)$ harmonique dans Δ_n , s'annulant sur les parties rectilignes de Δ_n^* et prenant sur l'arc Γ la valeur $\varphi(y)$. On peut même définir h_n dans $(D + D^*)$ entier en lui donnant la valeur zéro dans $(D + D^*) - (\Delta_n + \Delta_n^*)$.

Remarquons que la fonction h_n ainsi formée n'est pas harmonique dans D , la continuité des dérivées n'étant pas assurée sur la ligne de séparation de Δ_n et de $(D - \Delta_n)$.

Effectuons la représentation conforme de D sur le cercle unité, et considérons les homologues de Δ_n et des fonctions h_n, h . Le théorème de Harnack s'applique. En revenant aux éléments initiaux on obtient : *lorsque n augmente indéfiniment, h_n converge uniformément vers h .*

On peut également démontrer une propriété analogue pour les fonctions de Green en utilisant ou non la représentation conforme. Soit $G_n(M, P)$ la fonction de Green de Δ_n (1).

Supposons que M reste dans $(\Delta_{n_0} + \Delta_{n_0}^*)$, n_0 étant fixe, et considérons les valeurs de n supérieures à n_0 . La différence $G(M, P) - G_n(M, P)$ est une fonction harmonique de P dans Δ_n , même en M . Elle est positive ou nulle sur Δ_{n_0} , donc sur $(\Delta_{n_0} + \Delta_{n_0}^*)$.

En outre, sur la droite d'ordonnée r_n , elle est inférieure à $b_1 r_n$, b_1 étant une constante dépendant de n_0 [II, C, 3]; sur les segments de Δ_n^* d'abscisses $\pm l_n$, elle est inférieure à $b_2 e^{-\frac{\pi}{R} l_n}$, b_2 étant de même une constante [II, C, 2]. On a donc, *a fortiori* :

$$0 \leq G - G_n < b_1 r_n, \quad 0 \leq G - G_n < b_2 e^{-\frac{\pi}{R} l_n}$$

dans $(\Delta_{n_0} + \Delta_{n_0}^*)$. Or, lorsque n devient infini, l_n tend vers l'infini et r_n tend vers zéro. On peut donc trouver un nombre N indépendant des points M, P et tel que l'inégalité $n > N$ entraîne $G - G_n$ arbitrairement petit. Ainsi, $G(M, P) - G_n(M, P)$ *tend uniformément vers zéro, pour P dans $(D + D^*)$, et pour M , dans $(\Delta_{n_0} + \Delta_{n_0}^*)$.*

D. — UN DOMAINE D REMARQUABLE

1 Dans ce chapitre, nous déterminerons une fonction effectuant la représentation conforme du demi-plan D' sur un domaine D appelé D_a où l'arc Γ est très sensiblement un demi-cercle.

La fonction (30) transforme D_i en D' , et l'on a :

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dz'} = \frac{2R}{\pi} \frac{1}{1 - z'^2}.$$

Pour obtenir l'application conforme de D_c , il faudrait multiplier la dérivée précédente par un facteur d'incurvation pour l'intervalle $(-a, +a)$ choisi de façon que le segment de droite $A'B'$ soit l'homologue du demi-cercle Γ_c . La détermination de ce facteur semble difficile.

Par contre, on peut se donner, *a priori*, un facteur d'incurvation $\Phi(z')$ de l'intervalle $(-a, +a)$. La fonction Z définie par :

$$\frac{dZ}{dz'} = \frac{2R}{\pi} \frac{1}{1 - z'^2} \Phi(z')$$

(1) On peut prendre $G_n = 0$ pour l'extérieur à $(\Delta_{n_0} + \Delta_{n_0}^*)$.

donne la représentation conforme sur D' d'un domaine D . Or, dans le cas particulier où la droite Ox est rejetée à l'infini, on obtient le domaine de Joukowski $\mathcal{D}_c$ avec :

$$\frac{dZ}{dz'} = \frac{z' + \sqrt{z'^2 - a^2}}{\sqrt{z'^2 - a^2}} \quad (\text{à un facteur constant près}).$$

Cette dernière fonction est justement un facteur d'incurvation pour l'intervalle $(-a, +a)$.

Définissons alors Z par :

$$(56) \quad \frac{dZ}{dz'} = 2t \frac{1}{1-z'^2} \frac{z' + \sqrt{z'^2 - a^2}}{\sqrt{z'^2 - a^2}}$$

(t , constante réelle positive).

Lorsque le point M' (z') décrit le segment $C'A'$ et continue son trajet par un demi-cercle infiniment petit autour de A' en restant dans D' , l'argument de $\sqrt{z'^2 - a^2}$ croît de $\frac{\pi}{2}$, celui de $\frac{dZ}{dz'}$ diminue de $\frac{\pi}{2}$. L'arc Γ part donc normalement à AX en A (de même en B), et vers les Y positifs. De plus, il admet $O_1 Y$ pour axe de symétrie.

L'intégration de (56) donne :

$$(57) \quad Z = t \left[\text{Log} \frac{1+z'}{1-z'} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \text{Log} \frac{\sqrt{1-a^2} + \sqrt{z'^2 - a^2}}{\sqrt{1-a^2} - \sqrt{z'^2 - a^2}} \right].$$

Dans la suite nous poserons $a = \sin \alpha$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Plus généralement, considérons la fonction :

$$(58) \quad Z = \mu \text{Log} \frac{1+z'}{1-z'} + \mu_1 \text{Log} \frac{\sqrt{1-a^2} + \sqrt{z'^2 - a^2}}{\sqrt{1-a^2} - \sqrt{z'^2 - a^2}}$$

(μ, μ_1 , constantes réelles positives) ou :

$$(59) \quad Z = 2\mu \arg \text{th } z' + 2i\mu_1 \arg \text{tg} \sqrt{\frac{a^2 - z'^2}{1-a^2}}.$$

Le domaine D correspondant possède les propriétés énoncées plus haut pour celui défini par (56).

Les équations paramétriques de Γ sont alors :

$$X = \mu \text{Log} \frac{1+z'}{1-z'} = 2\mu \text{Arg th } z'$$

(déterminations réelles);

$$(60) \quad Y = 2\mu_1 \text{Arc tg} \sqrt{\frac{a^2 - z'^2}{1-a^2}} = 2\mu_1 \text{Arc cos} \sqrt{\frac{1-a^2}{1-z'^2}}$$

(déterminations principales).

Son équation cartésienne est :

$$(61) \quad \cos \frac{Y}{2\mu_1} = \cos \alpha \operatorname{ch} \frac{X}{2\mu} \quad \left(0 \leq \frac{Y}{2\mu_1} \leq \alpha \right).$$

La largeur de la bande est :

$$(62) \quad R = (\mu + \mu_1) \pi.$$

La demi-largeur et la profondeur de l'encoche sont :

$$(63) \quad \begin{cases} O_1 A = q = 2\mu \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (\sin \alpha), \\ O_1 S = p = 2\mu_1 \alpha. \end{cases}$$

La fonction (58) ou (59) possède en C' et en A' les propriétés énoncées dans [II, A].

En particulier, les vecteurs transformations [II, A, 2] en C et en A sont respectivement :

$$T_c = \frac{R}{\pi} \operatorname{Log} \frac{1}{2\beta_0} = 2\mu_1 \operatorname{Log} \cos \alpha,$$

$$T_A = O_1 A - \frac{R}{\pi} \operatorname{Log} \frac{1+a}{1-a} = -\mu_1 \operatorname{Log} \frac{1+a}{1-a}.$$

La différence :

$$T_c - T_A = 2\mu_1 \operatorname{Log} (1+a) \quad \text{est positive.}$$

Ainsi, dans la représentation conforme de ce domaine D sur D_i , la présence de l'encoche a des répercussions jusqu'à l'infini.

D'autre part, Z est développable en série suivant les puissances croissantes de $\sqrt{z' - a}$. Les premiers termes du développement sont :

$$Z = \mu \operatorname{Log} \frac{1+a}{1-a} + 2\mu_1 \sqrt{\frac{2a}{1-a^2}} \sqrt{z' - a} + \frac{2\mu}{1-a^2} (z' - a) \dots$$

et l'on a (40) :

$$\chi(a) = 2\mu_1 \sqrt{\frac{2a}{1-a^2}}.$$

2 CHOIX DES CONSTANTES μ ET μ_1 .

a) Choisissons d'abord μ et μ_1 de façon que $p = q$. On a alors :

$$(64) \quad \begin{cases} \mu = \frac{q}{2 \operatorname{Arg} \operatorname{th} (\sin \alpha)}, \\ \mu_1 = \frac{q}{2\alpha}. \end{cases}$$

Étudions la position de l'arc Γ par rapport au demi-cercle de diamètre AB. Soient M_1, P_1 , deux points de même ordonnée Y et d'abscisses positives ou nulles, situés respectivement sur l'arc et sur le demi-cercle.

On a :

$$(65) \quad \overline{P_1 M_1} = q \left[\frac{\text{Arg ch} \left(\frac{\cos \frac{\alpha Y}{q}}{\cos \alpha} \right)}{\text{Arg ch} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)} - \sqrt{1 - \frac{Y^2}{q^2}} \right].$$

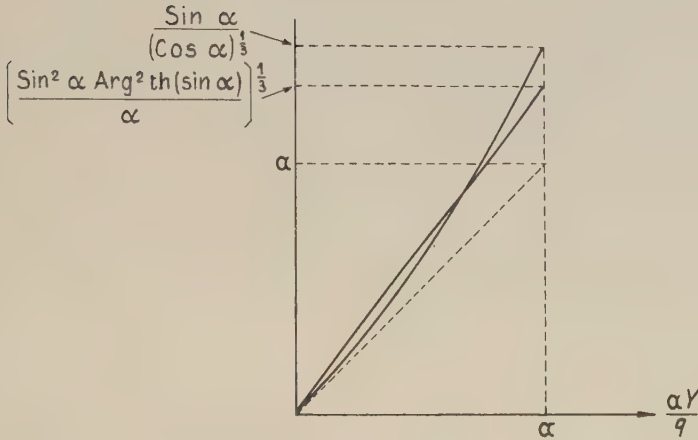


Fig. 5

La dérivée de $\overline{P_1 M_1}$ par rapport à Y a le signe de :

$$(66) \quad \left(\frac{\text{Arg th} \sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left[\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \frac{\alpha Y}{q}} - 1 \right] + 1 - \frac{q^2}{Y^2},$$

fonction dont la dérivée a le signe de :

$$(67) \quad - \left[\frac{\sin \alpha \cdot \text{Arg th} (\sin \alpha)}{\alpha^2} \right]^{2/3} \cdot \frac{\alpha Y}{q} + \frac{\sin \frac{\alpha Y}{q}}{\left(\cos \frac{\alpha Y}{q} \right)^{1/3}}.$$

La construction des courbes représentatives (fig. 5) des deux termes de la différence (67), montre que cette différence est successivement nulle, positive, nulle, puis négative, lorsque $\frac{Y}{q}$ croît de 0 à 1. On en déduit que la fonction (66) est de même positive puis négative. Donc $\overline{P_1 M_1}$ croît à partir de zéro, passe par un maximum, puis décroît jusqu'à zéro. En particulier l'arc Γ de ce domaine (D_a) est à l'extérieur du demi-cercle de diamètre AB, sauf aux points A, S, B où il lui est tangent.

Il est intéressant de connaître une borne supérieure de l'erreur que l'on fait en remplaçant le demi-cercle par cet arc.

L'équation (61) peut être mise sous la forme :

$$(68) \quad \frac{X}{q} = \frac{\operatorname{Arg} \operatorname{ch} \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{q} Y}{\cos \alpha} \right)}{\operatorname{Arg} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)}.$$

En faisant, pour cette fonction de α , une étude analogue à celle qui a été faite pour (65), on démontre que $\frac{X}{q}$ est, pour $\frac{Y}{q}$ donné, une fonction croissante de α .

Il en est donc de même de l'erreur relative.

Lorsque α est petit, on peut développer $\frac{X}{q}, \frac{Y}{q}$ donnés en fonction de $\varphi = \operatorname{Arc} \sin \frac{z'}{a}$, par :

$$(69) \quad \begin{aligned} \frac{X}{q} &= \frac{\operatorname{Arg} \operatorname{th} (\sin \alpha \cdot \sin \varphi)}{\operatorname{Arg} \operatorname{th} (\sin \alpha)}, \\ \frac{Y}{q} &= \frac{\operatorname{Arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi)}{\alpha}, \end{aligned}$$

suivant les puissances croissantes de α . On trouve :

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{X}{q} &= \sin \varphi \left[1 - \cos^2 \varphi \left\{ \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^4}{15} \left(\frac{1}{3} - 3 \sin^2 \varphi \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha^6}{315} \left(-\frac{2}{3} + 18 \sin^2 \varphi - 45 \sin^4 \varphi \right) \right\} + \varepsilon \alpha^6 \right], \\ \frac{Y}{q} &= \cos \varphi \left[1 + \sin^2 \varphi \left\{ \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^4}{15} (2 - 3 \cos^2 \varphi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha^6}{315} (17 - 60 \cos^2 \varphi + 45 \cos^4 \varphi) \right\} + \varepsilon' \alpha^6 \right], \end{aligned} \right.$$

et :

$$(71) \quad \frac{X^2 + Y^2}{q^2} = 1 + \frac{\alpha^4}{45} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{2 \alpha^6}{945} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (-3 + 13 \sin^2 \varphi) + \varepsilon'' \alpha^6,$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ tendant vers zéro avec α .

Ainsi, aux infiniment petits du quatrième ordre près, l'arc se confond avec le demi-cercle. Même avec $\alpha = \frac{\pi}{8}$, le deuxième terme du développement (71) est inférieur à $14 \cdot 10^{-5}$, le troisième a une valeur absolue inférieure à 10^{-5} .

Pour obtenir un résultat définitif, nous avons effectué le calcul numérique avec $\alpha = \frac{\pi}{8}$; nous avons trouvé, compte tenu de l'approximation des résultats donnés dans les tables :

$$(72) \quad \frac{X^2 + Y^2}{q^2} - 1 < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Ainsi, la fonction (58) avec μ, μ_1 donnés par (64) et $\alpha \leq \frac{\pi}{8}$ permet la représentation conforme sur D' , du domaine D_a dans lequel la distance d'un point de l'arc au demi-cercle de diamètre AB est inférieure au dix-millième du rayon du cercle.

C'est là un résultat remarquable.

La même fonction peut rendre des services dans l'étude du domaine formé par une bande comprise entre deux droites parallèles de laquelle on a enlevé un cercle centré sur l'axe longitudinal X, chacune des moitiés de ce domaine séparées par X étant très voisines de D_a . Une telle surface intervient dans plusieurs questions de mécanique et de physique.

Le rapport de la largeur R de la bande D_a , à la flèche de l'arc Γ_a correspondant est :

$$(73) \quad \frac{R}{q} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\text{Arg th}(\sin \alpha)} \right].$$

C'est une fonction décroissante de α .

En prenant $\frac{R}{q} = 8$ qui, comme on l'a rappelé au début [I, 2, c)], a été étudié expérimentalement à plusieurs reprises, on trouve $\alpha = 24,683 \frac{\pi}{200}$, le nombre décimal étant approché à moins de $0,5 \cdot 10^{-3}$. Le calcul d'erreur ci-dessus fait pour α inférieur ou égal à $\frac{\pi}{8}$ s'applique donc ici. Une valeur approchée de la fonction (58) correspondante est, à un facteur constant près :

$$(74) \quad Z = 0,9746 \text{Log} \frac{1+z'}{1-z'} + \text{Log} \frac{0,9258 + \sqrt{z'^2 - 0,1429}}{0,9258 - \sqrt{z'^2 - 0,1429}},$$

chaque nombre décimal étant approché à moins de $5 \cdot 10^{-5}$ près;

b) prenons maintenant $\mu = \mu_1 = \frac{1}{2}$ et soit D_b le domaine D correspondant. La largeur de la bande associée D_i est $R = \pi$. L'arc Γ_b a pour équation :

$$(75) \quad \cos Y = \cos \alpha \cdot \text{ch} X.$$

Il est, tout au moins pour $\alpha \leq \frac{\pi}{8}$, très voisin d'une demi-ellipse.

Pour la valeur citée $\alpha = 24,683 \frac{\pi}{200}$, on a :

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha}{\text{Arg th}(\sin \alpha)} = 0,9746 \quad \text{à moins de } 5 \cdot 10^{-5} \text{ près.}$$

L'intérêt du choix, $\mu = \mu_1 = \frac{1}{2}$, est qu'il permet de simplifier Z. On trouve :

$$(76) \quad Z = \text{Log} \frac{\cos \alpha + \sqrt{z'^2 - \sin^2 \alpha}}{1 - z'} = \text{Log} \frac{1 + z'}{\cos \alpha - \sqrt{z'^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

La fonction inverse :

$$(77) \quad z' = \frac{\operatorname{ch} Z - \cos \alpha}{\operatorname{sh} Z}$$

permet de calculer :

$$(78) \quad \begin{cases} x' = \frac{\operatorname{sh} X (\operatorname{ch} X - \cos \alpha \cdot \cos Y)}{\operatorname{sh}^2 X + \sin^2 Y}, \\ y' = \frac{\sin Y (\cos \alpha \cdot \operatorname{ch} X - \cos Y)}{\operatorname{sh}^2 X + \sin^2 Y}. \end{cases}$$

Le domaine D_b possède une autre propriété remarquable. Transformons la bande D_i associée en le demi-plan D' par la relation $\mathfrak{S} = \operatorname{Log} \frac{1+z'}{1-z'}$. En tenant compte de (75) on trouve, en particulier, que l'arc Γ_b devient le *demi-cercle* de rayon $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, centré à l'origine (et situé du côté des y' positifs). L'homologue de D_b est alors le domaine de Joukowsky $\mathcal{D}_c$. Si maintenant on fait l'application conforme de D_i sur le cercle unité grâce à la fonction $\frac{z'-i}{z'+i}$, on obtient, pour transformé de D_b , ce cercle échancré par un arc de cercle orthogonal et vu de l'origine sous l'angle 2α .

La connaissance des fonctions (76) et (78) permet la détermination explicite, dans le cas de D_b , de certaines fonctions harmoniques et de la fonction de Green.

On peut trouver, par exemple, la fonction $H_1(M)$, du type $\mathcal{V}$, prenant la valeur zéro sur les parties rectilignes de $(Ox + \Sigma)$ et la valeur $\varphi(y) = 1 - \frac{y}{\pi}$ sur l'arc Γ_b , ainsi que la fonction $U_0(M)$, toujours du type $\mathcal{V}$, s'annulant sur Ox et prenant la valeur un sur Σ_b . D'après [II, B], $H_1(M)$ existe, elle est unique.

Soit $\widehat{M'} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2y'}{x'^2 + y'^2 - 1}$ la détermination de l'angle $(M'E', M'C')$ qui s'annule sur $C'x'$. La fonction $\frac{\widehat{M'}}{\pi}$ est harmonique dans D' , elle prend la valeur 1 sur le segment $E'C'$ et la valeur 0 sur la partie de l'axe x' extérieure à ce segment. En transformant par les relations (78) on obtient la fonction :

$$(79) \quad U_0 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 \sin Y (\cos Y - \cos \alpha \cdot \operatorname{ch} X)}{\sin^2 \alpha - 2 \cos Y (\cos Y - \cos \alpha \cdot \operatorname{ch} X)}.$$

Visiblement :

$$(79') \quad H_1(X, Y) = U_0 - \frac{y}{\pi} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin Y}{2 \cos \alpha \operatorname{ch} X - (1 + \cos^2 \alpha) \cos Y}.$$

De même, en utilisant la méthode indiquée [II, C, 1] pour la détermination de la fonction de Green, on trouve ici :

$$(80) \quad G_b(M, P) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{[\operatorname{ch}(X - \xi_1) - \cos(Y + \eta_1)] [\operatorname{ch}(X - \xi_1) + \cos(Y + \eta_1)]}{[\operatorname{ch}(X - \xi_1) - \cos(Y - \eta_1)] [\operatorname{ch}(X - \xi_1) + \cos(Y - \eta_1)]} \\ - \frac{2 \cos \alpha (\operatorname{ch} X \cos \eta_1 + \operatorname{ch} \xi_1 \cos Y) + \cos^2 \alpha \{ \operatorname{ch}(X + \xi_1) + \cos(Y - \eta_1) \}}{2 \cos \alpha (\operatorname{ch} X \cos \eta_1 + \operatorname{ch} \xi_1 \cos Y) + \cos^2 \alpha \{ \operatorname{ch}(X + \xi_1) + \cos(Y + \eta_1) \}}.$$

Si le point M reste dans un domaine fixe fini dont la frontière n'a aucun point commun avec Ox, G_b est équivalent à :

$$\frac{4 \sin Y \cos \alpha (\cos \alpha \cdot \operatorname{ch} X - \cos Y)}{e^{-2x} - 2 \cos \alpha \cdot \cos Y e^{-x} + \cos^2 \alpha} \cdot \sin \eta_1 e^{-\xi_1}$$

lorsque P tend vers un point de Ox ou vers C. On obtient ainsi l'expression de la limite de $\frac{G_b}{\eta}$ et de $G_b e^{\xi_1}$ lorsque, M restant fixe, P tend vers un point de Ox ou vers C.

CHAPITRE III

EXISTENCE, UNICITÉ ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS ⁽¹⁾

A. — LE PROBLÈME $\mathcal{P}'$

Dans tout ce chapitre, nous prendrons $R = 1$. Comme nous l'avons déjà vu [I, 3] cela ne restreint pas la généralité.

1 LE THÉORÈME $\mathcal{A}$.

Soit un domaine borné et fermé dont l'intérieur est désigné par T , et dont la frontière T^* fait partie de $[D + O_x + \Sigma]$. Considérons deux fonctions $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$ régulières dans T , prenant sur T^* des suites de valeurs respectivement continues : F^* , Φ^* , telles que :

$$(81) \quad \Phi^* - F^* \geq 0,$$

F étant solution de l'équation (25) et Φ vérifiant dans T :

$$(82) \quad \Delta \Phi - \frac{\lambda}{y^2} \Phi \leq 0.$$

La différence :

$$(83) \quad \psi(x, y) = \Phi(x, y) - F(x, y)$$

est solution régulière dans T de l'équation :

$$(84) \quad \Delta \psi = \frac{\lambda}{y^2} \psi + \left(\Delta \Phi - \frac{\lambda}{y^2} \Phi \right).$$

Elle prend sur T^* des valeurs en succession continue, formant une fonction positive ou nulle d'après (81). On en déduit ⁽²⁾ — compte tenu de (82) — que dans T elle est positive.

(1) Plusieurs des résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet d'une note publiée aux Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 230, pp. 713-714.

(2) Par exemple : BRELOT, thèse, 1931, p. 17.

Il en résulte donc :

$$(85) \quad \underline{\Phi(x, y) > F(x, y) \quad \text{dans} \quad T.}$$

Dans le cas particulier où Φ est également solution de (25) on a la double inégalité :

$$(86) \quad \underline{0 < \Phi - F < \max \text{ de } (\Phi^* - F^*) \quad \text{dans} \quad T.}$$

2 LES FONCTIONS f_n .

Pour isoler les points à l'infini et les points sur Ox , nous utiliserons les domaines Δ_n définis dans [II, C, 8].

Il existe (1) une fonction unique $f_n(x, y)$ régulière et solution de (25) dans Δ_n , prenant les valeurs zéro sur les parties rectilignes de Δ_n^* et la valeur $\varphi(y)$ donnée par (29) sur l'arc Γ . Nous commencerons par borner f_n , à l'aide, notamment, de solutions particulières de la même équation (25) :

a) sur Δ_n^* , f_n est positive ou nulle. Cette fonction est donc positive dans Δ_n (théorème A);

b) la fonction $y^{1+\frac{k}{2}}$ est aussi solution régulière de (25) dans Δ_n ; il en est de même de :

$$F(x, y) = k_1 y^{1+\frac{k}{2}} - f_n \quad (k_1, \text{ constante positive}).$$

F prend des valeurs positives sur les parties rectilignes de Δ_n^* . Sur l'arc Γ on a :

$$F^* = k_1 y^{1+\frac{k}{2}} - \varphi(y) \geq k_1 y^{1+\frac{k}{2}} - s' (1 - y),$$

s' étant la constante dont il a été question dans le paragraphe [II, B, 8]. Cette dernière expression est une fonction croissante de y . Pour que F^* soit positive ou nulle sur Γ , il suffit que l'on ait :

$$(87) \quad k_1 \geq \frac{s' p}{(1 - p)^{1+\frac{k}{2}}}.$$

Dans le cas où $\varphi(y)$ a l'expression (28) on peut prendre :

$$(88) \quad k_1 \geq \frac{1}{(1 - p)^{1+k}} - 1.$$

Alors la fonction F correspondante est positive ou nulle sur Δ_n^* tout entier. Donc, elle est positive dans Δ_n (théorème A).

(1) Par exemple : PICARD, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, 1930, chap. IX.

En groupant les deux propriétés ainsi obtenues, on a :

$$(89) \quad 0 < f_n < k_1 y^{1+\frac{k}{2}} \quad \text{dans} \quad \Delta_n;$$

c) cherchons maintenant pour l'équation (25) une solution régulière de la forme $e^{-x} \chi(y)$. La fonction $\chi(y)$ doit alors satisfaire (condition nécessaire et suffisante) à l'équation de Fuchs, ⁽¹⁾ :

$$(90) \quad \frac{d^2 \chi}{dy^2} + \left(1 - \frac{\lambda}{y^2}\right) \chi = 0.$$

L'équation déterminante $r(r-1) - \lambda = 0$ a pour racines $r = -\frac{k}{2}$ et $r = 1 + \frac{k}{2}$. L'équation (90) a donc des solutions de la forme :

$$y^{1+\frac{k}{2}} (c_0 + c_1 y + \dots + c_i y^i + \dots)$$

(i , entier réel, positif ou nul), les c étant des constantes. Prenons, par exemple, $c_0 = 1$. On trouve alors les relations de récurrence :

$$c_i = 0, \quad c_{i+1} = -\frac{c_{i-1}}{(i+1)(i+2+k)}.$$

La série obtenue :

$$(91) \quad \chi_1(y) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{y^{2\mu}}{2 \cdot 4 \dots 2\mu \cdot (k+3)(k+5) \dots (k+2\mu+1)}$$

est absolument convergente dans l'intervalle (0, 1). Et l'équation (25) a pour solution :

$$e^{-x} y^{1+\frac{k}{2}} \chi_1(y).$$

La fonction :

$$(92) \quad F(x, y) = k_2 e^{-x} y^{1+\frac{k}{2}} \chi_1(y) - f_n$$

(k_2 , constante positive), est solution régulière de (25) dans Δ_n ; sur $(\Delta_n^* - \Gamma)$, elle est positive. Dans $(\Delta_n + \Delta_n^*)$ elle est au moins égale à :

$$[k_2 e^{-x} \chi_1(y) - k_1] y^{1+\frac{k}{2}},$$

k_1 étant toujours donné par (87) ou (88). Pour qu'elle soit positive ou nulle sur la partie de Oy faisant partie de $(\Delta_n + \Delta_n^*)$, et sur la partie de l'arc Γ où les abscisses sont positives, il suffit que $k_2 e^{-q} \chi_1(1) - k_1$ soit positif ou nul, c'est-à-dire que :

$$(93) \quad k_2 \geq \frac{k_1 e^q}{\chi_1(1)}.$$

(1) On peut la ramener à une équation de Bessel. Cela n'apporte pas de simplification à ce qui nous intéresse ici.

Comme $\chi_1(1)$ est supérieur à $1 - \frac{1}{2(3+k)} = \frac{5+2k}{6+2k}$, il suffit que :

$$(94) \quad k_2 \geq k_1 e^q \frac{6+2k}{5+2k}.$$

Avec l'une ou l'autre de ces valeurs de k_2 , la fonction (92) est positive ou nulle sur tout le pourtour de la partie de Δ_n située du côté des x positifs. Toujours d'après le théorème $\mathcal{A}$, et en tenant compte de la symétrie, on obtient :

$$(95) \quad f_n < k_2 e^{-|x|} y^{1+\frac{k}{2}} \chi_1(y), \quad \text{dans} \quad \Delta_n;$$

et *a fortiori* :

$$(96) \quad f_n < k_2 e^{-|x|} y^{1+\frac{k}{2}}, \quad \text{dans} \quad \Delta_n;$$

d) soit toujours $h_n(x, y)$ la fonction, harmonique dans Δ_n , et prenant sur Δ_n^* les mêmes valeurs que f_n . Cette fonction est positive dans D. La différence $h_n - f_n$ est nulle sur Δ_n^* .

L'application du théorème $\mathcal{A}$ montre que l'on a $f_n < h_n$, et *a fortiori* :

$$f_n < h \quad \text{dans} \quad \Delta_n;$$

e) *Application numérique.*

Si l'on a $q \leq \frac{1}{8}$, $p \leq \frac{1}{8}$, on trouve :

$$k_1 \geq 6,50 p, \quad k_2 \geq 8,05 p.$$

3 CONVERGENCE UNIFORME DES f_n .

a) Considérons un point M (x, y) quelconque dans D. Soient n_1, n_2 ($n_1 < n_2$), deux valeurs de n suffisamment grandes pour que M soit à l'intérieur de Δ_{n_1} . Sur $(\Delta_{n_1}^* - \Gamma)$, on a $f_{n_1} = 0$, $f_{n_2} \geq 0$, d'après (89). Sur l'arc Γ , $f_{n_2} = f_{n_1} = \varphi(y)$ est positive ou nulle. Sur $\Delta_{n_1}^*$ entier on a donc $f_{n_2} - f_{n_1} \geq 0$. D'après le théorème $\mathcal{A}$, la différence $f_{n_2} - f_{n_1}$ est alors positive dans Δ_{n_1} . Par suite $f_n(x, y)$ est une fonction croissante de n . Comme elle est bornée supérieurement, elle a, pour n infini, une limite qui sera désignée provisoirement par $f'(x, y)$. Cette limite satisfait aux inégalités suivantes :

$$(97) \quad 0 < \underline{f'(x, y)} < k_1 y^{1+\frac{k}{2}}, \quad \text{avec} \quad k_1 \text{ donné par (88);}$$

$$(98) \quad 0 < \underline{f'(x, y)} < k_2 e^{-|x|} y^{1+\frac{k}{2}} \chi_1(y), \quad \text{avec} \quad k_2 \text{ et } \chi_1 \text{ donnés par (93) et (91);}$$

$$(99) \quad 0 < \underline{f'(x, y)} < h(x, y);$$

b) soient n_0 une valeur fixe de n , et n_1, n_2 , deux valeurs quelconques telles que $n_0 < n_1 < n_2$.

Sur la partie de Δ_{n_1} ayant pour ordonnée r_{n_1} et sur les segments de droite d'abscisses $\pm l_{n_1}$, on a respectivement :

$$(100) \quad f_{n_1} < k_2 r_{n_1}^{1+\frac{k}{2}};$$

$$(101) \quad f_{n_1} < k_2 e^{-l_{n_1}}.$$

D'après les hypothèses sur r_n et l_n , à tout nombre positif ε , on peut faire correspondre $n_1 > n_0$, de façon que le deuxième membre des inégalités (100) et (101) soit inférieur à ε . Alors, sur $\Delta^*_{n_1}$ entier, on a :

$$0 \leq f_{n_2} - f_{n_1} < \varepsilon.$$

Donc (théorème A), il en est de même dans $(\Delta_{n_1} + \Delta^*_{n_1})$, et en particulier dans $(\Delta_{n_0} + \Delta^*_{n_0})$; et cela, quel que soit $n_2 > n_1$. La convergence est donc uniforme.

Dans tout domaine fermé $(\Delta_{n_0} + \Delta^*_{n_0})$, $f_n(x, y)$ tend uniformément vers $f'(x, y)$.

4 LA LIMITE $f'(x, y)$ EST SOLUTION DU PROBLÈME $\mathcal{F}'$.

a) Montrons d'abord que, lorsque M tend vers un point de D, $f'(x, y)$ tend vers la valeur fixée à l'avance pour ce point.

Les inégalités (99) montrent que lorsque M tend vers un point situé sur les parties rectilignes de $(Ox + \Sigma)$ ou à l'infini, $f'(x, y)$ tend vers zéro. Mais les relations (97), (98) donnent des renseignements supplémentaires.

Sur Ox, f' s'annule comme $y^{1+\frac{k}{2}}$, et à l'infini comme $e^{-|x|}$ au moins, le produit $f' e^{|x|}$ étant inférieur à $k_2 y^{1+\frac{k}{2}} \chi_1(y)$.

En outre, la convergence uniforme de f_n vers f' sur tout $(\Delta_{n_0} + \Delta^*_{n_0})$ montre que si M tend vers un point de Γ d'ordonnée y , $f'(x, y)$ tend vers $\varphi(y)$;

b) enfin, pour montrer qu'en un point M (x, y) quelconque de D $f'(xy)$ est solution de l'équation (83), il suffit de reprendre, par exemple, la démonstration de BreLOT (1). C'est ce que nous allons faire brièvement.

Soit T un domaine fermé intérieur à D et entourant M et soit P (ξ, η) un point quelconque de T. La fonction :

$$(102) \quad f_n(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint_T \lambda \frac{f_n(\xi, \eta)}{\eta^2} \text{Log} \frac{1}{MP} d\xi d\eta$$

est une fonction harmonique dans T. Dans ce domaine, f_n converge uniformément vers f' . D'autre part, l'intégrale double est une fonction croissante de n , et elle définit, dans

(1) BRELOT. — Thèse, 1931, pp. 35-36.

T, une famille de fonctions bornées également continues (1); donc, elle a une limite qu'elle atteint uniformément et qui est :

$$\iint_{\tau} \lambda \frac{f'(\xi, \eta)}{\eta^2} \text{Log} \frac{1}{MP} d\xi d\eta.$$

Par suite, la fonction harmonique (102) converge uniformément vers :

$$(103) \quad f'(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\tau} \lambda \frac{f'(\xi, \eta)}{\eta^2} \text{Log} \frac{1}{MP} d\xi d\eta.$$

On en déduit que $f'(x, y)$ a, en M, des dérivées premières continues et un laplacien égal à $\lambda \frac{f'(x, y)}{y^2}$.

Finalement, $f'(x, y)$ est une solution du problème $\mathfrak{P}'$.

On pourrait démontrer directement que c'est la seule solution. La méthode est très analogue à celle qui sera donnée pour le problème $\mathfrak{P}$. D'autre part, l'unicité de la solution de $\mathfrak{P}$, entraîne celle de la solution de $\mathfrak{P}'$. Nous renvoyons donc au paragraphe suivant.

B. — LE PROBLÈME $\mathfrak{P}$

1 La fonction :

$$(104) \quad U(x, y) = y^{1+k} + y^{\frac{k}{2}} f'(x, y)$$

est alors une solution du problème $\mathfrak{P}$.

2 Montrons que c'est l'unique solution. Il suffit de démontrer que la différence entre deux solutions est identiquement nulle, c'est-à-dire que toute fonction $U_1(x, y)$ régulière et solution de l'équation (22) dans D, nulle sur $(Ox + \Sigma)$ et bornée à l'infini est nulle en tout point de D.

La fonction :

$$u(x, y) = U_1(x, y) - \varepsilon \text{ch } x \cdot \sigma(y),$$

où ε est une constante positive et $\sigma(y)$ une fonction de y dérivable deux fois dans l'intervalle $0 \leq y \leq 1$, est solution de l'équation :

$$(105) \quad \Delta u = \frac{k}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \text{ch } x \left(\frac{k}{y} \frac{d\sigma}{dy} - \sigma - \frac{d^2\sigma}{dy^2} \right).$$

Choisissons $\sigma(y)$ de façon que, pour $0 \leq y \leq 1$, on ait :

$$(106) \quad \sigma > 0, \quad k \frac{\frac{d\sigma}{dy}}{y} - \sigma - \frac{d^2\sigma}{dy^2} > 0.$$

(1) MONTEL. — *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*, 1927, p. 27.

On peut, par exemple, prendre $\sigma = \sin y + \frac{k}{3}$.

La fonction U_1 étant bornée à l'infini, on peut trouver un nombre l supérieur à q , tel que, pour $x = \pm l$ et $0 \leq y \leq 1$, on ait :

$$(107) \quad U_1(x, y) - \varepsilon \operatorname{ch} x \cdot \sigma(y) < 0.$$

Désignons toujours par D_l le domaine commun à D et à la bande $-l < x < l$, par D_l^* sa frontière. L'inégalité (107) est vérifiée sur D_l^* tout entière. La propriété indiquée au théorème 1. s'applique encore à l'équation (105) : en un point quelconque de D_l , la fonction U ne peut être positive ou nulle (1). La relation (107) est donc vraie en tout point M de D_l . On a :

$$(108) \quad U_1(x, y) < \varepsilon \operatorname{ch} x \cdot \sigma(y) \quad \text{dans} \quad (D_l + D_l^*).$$

Soit maintenant $M_0(x_0, y_0)$ un point quelconque de D . A tout nombre positif ε_1 , faisons correspondre ε positif tel que l'on ait :

$$\varepsilon \operatorname{ch} x_0 \cdot \sigma(y_0) < \varepsilon_1.$$

On peut déterminer un domaine D_l comme il est dit ci-dessus, contenant M_0 . On a alors, d'après (108) :

$$U_1(x_0, y_0) < \varepsilon_1$$

et, comme ε_1 est arbitraire :

$$(109) \quad U_1(x_0, y_0) \leq 0.$$

De même, la fonction :

$$U_1(x, y) = U_1(x, y) + \varepsilon \operatorname{ch} x \cdot \sigma(y)$$

[σ possédant toujours les propriétés (106)], est solution, dans D , de l'équation :

$$\Delta U_1 = \frac{k}{y} \frac{\partial U_1}{\partial y} - \varepsilon \operatorname{ch} x \left(\frac{k}{y} \cdot \frac{d\sigma}{dy} - \sigma - \frac{d^2\sigma}{dy^2} \right).$$

Comme ci-dessus, on peut trouver D_l tel que U_1 soit positif sur D_l^* , et par suite dans D_l . D'où :

$$U_1(x, y) > -\varepsilon \operatorname{ch} x \cdot \sigma(y) \quad \text{dans} \quad (D_l + D_l^*).$$

On en déduit, comme plus haut, qu'en M_0 on a :

$$(110) \quad U_1(x_0, y_0) \geq 0.$$

(1) Si U devenait positive ou nulle, elle passerait par un maximum positif ou nul, au moins en un point de D . En ce point, on aurait :

$$\Delta U \leq 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

en contradiction avec (105) et (106).

La comparaison des relations (109) et (110) montre que :

$$U_1(x_0, y_0) = 0.$$

Pour finir, le problème $\mathcal{P}$ a une solution unique : la fonction (104).

En utilisant la relation (27) on en déduit également l'unicité annoncée de la solution de $\mathcal{P}'$.

3 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE LA SOLUTION DU PROBLÈME $\mathcal{P}$.

La fonction $U(x, y)$ — (104) — vérifie dans D la double inégalité :

$$0 < U - y^{1+k} < k_2 e^{-|x|} y^{1+k},$$

conséquence de (98), k_2 étant toujours donné par (92) ou (93). On en déduit, en particulier :

a) le quotient $\frac{U(x, y)}{y^{1+k}} = S(x, y)$ reste compris entre 1 et $1 + k_2$ lorsque y tend vers zéro. Dans le cas de la torsion, $\frac{U}{y^4}$ est fini et supérieur à un sur Ox ;

b) si le point $M(x, y)$ s'éloigne indéfiniment, U tend vers y^{1+k} (y^4 pour la torsion), et la différence $U - y^{1+k}$ s'annule au moins comme $e^{-|x|}$;

c) la bande inaltérée D_i est un cas particulier de D : la solution y^{1+k} est encore unique;

d) la présence de l'encoche Γ augmente U en tout point de D . Par contre, elle ne modifie pas la valeur que prend U à l'infini;

e) lorsque p tend vers zéro, k_2 tend vers zéro. Donc, lorsque D tend vers D_i , U tend vers y^{1+k} , solution du même problème pour D_i . U est donc fonctionnelle continue de Γ lorsque D tend vers D_i .

C. — PROPRIÉTÉS INTÉGRALES DES SOLUTIONS

1 Nous désignerons désormais par $f(x, y)$ la solution du problème $\mathcal{P}'$. $G(x, y; \xi, \eta)$ étant toujours la fonction de Green de D , nous nous proposons d'étudier directement l'intégrale :

$$(111) \quad I(x, y) = \iint_D \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

a) Soit T un domaine fermé complètement intérieur à D et soit $M(x, y)$ un point restant dans un domaine intérieur à T . Supposons T suffisamment grand pour que T soit tout entier intérieur au domaine D_i correspondant et divisons D_i en T et en $D_i - T$.

Dans T la fonction $\frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2}$ a des dérivées premières continues; G est la somme d'une fonction harmonique du point P (ξ, η) et de $\text{Log} \frac{1}{MP}$. Donc l'intégrale :

$$\iint_T \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta$$

a des dérivées premières continues et un laplacien égal à :

$$- 2\pi \frac{f(x, y)}{y^2}.$$

b) Lorsque P est dans ($D_I - T$), G est une fonction harmonique. Les intégrales :

$$(112) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iint_{D_I - T} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta, \\ \iint_{D_I - T} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta, \quad \iint_{D_I - T} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \frac{\partial G}{\partial y} d\xi d\eta \end{array} \right.$$

ont un sens puisque, même dans le voisinage de Ox, on a :

$$\frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} < k_1 \eta^{\frac{k}{2}-1} \quad [k_1, \text{ constante donnée par (87)}].$$

D'autre part, lorsque P (ξ, η) s'éloigne indéfiniment, G est le produit de $e^{-\pi|\xi|}$ par une fonction restant finie. Il en est de même des dérivées $\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}$. Donc, lorsque I devient infini, les intégrales (112) convergent *uniformément* et respectivement vers :

$$(113) \quad \iint_{D - T} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta = J(x, y);$$

$$(114) \quad \iint_{D - T} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta, \quad \iint_{D - T} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \frac{\partial G}{\partial y} d\xi d\eta.$$

De plus, les intégrales (114) sont les dérivées de J (x, y).

Un raisonnement analogue montre que J a des dérivées secondes que l'on obtient en remplaçant G par ses dérivées secondes dans l'intégrale (113). Comme G est harmonique, J a un laplacien qui est nul.

En définitive, l'intégrale I (x, y) est régulière dans D, son laplacien est :

$$- 2\pi \frac{f(x, y)}{y^2}.$$

Ou encore, la fonction :

$$(115) \quad f(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint_D \lambda \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta$$

est harmonique dans D.

c) Montrons que l'intégrale I tend vers zéro lorsque M tend vers $M_0(x_0, y_0)$ de $(Ox + \Sigma)$ ou vers l'infini.

Démontrons d'abord une propriété.

Ici, nous supposons que l est quelconque par rapport à x , le point M de D étant intérieur à D_l ou non. Sur $D - D_l$ on a, d'après (98) :

$$\frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} < k_2 e^{-|\xi|} \leq k_2 e^{-l},$$

d'où :

$$\iint_{D-D_l} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta \leq k_2 e^{-l} \iint_{D-D_l} G d\xi d\eta \leq k_2 e^{-l} \iint_D G d\xi d\eta \leq k_2 e^{-l} \iint_{D_l} G_i d\xi d\eta.$$

Or, la dernière intégrale a un sens et elle est indépendante de x . On peut donc déterminer une valeur fixe de l, l_0 , telle que :

$$(116) \quad \iint_{D-D_{l_0}} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\varepsilon, \text{ nombre positif arbitraire}).$$

Nous pouvons maintenant étudier la limite de I :

α) lorsque M tend vers M_0 , on commence par l'enfermer dans un petit cercle de centre M_0 , de rayon ρ , et par choisir le nombre l_0 de tout à l'heure supérieur aux deux nombres $|x_0 \pm \rho|$. On montre alors, en employant le raisonnement classique pour un domaine borné ⁽¹⁾, qu'on peut prendre M suffisamment près de M_0 pour que l'intégrale $\iint_{D_{l_0}} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta$ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. I tend bien vers zéro lorsque M tend vers M_0 ;

β) lorsque M s'éloigne indéfiniment, par exemple lorsque x tend vers $+\infty$, commençons par fixer l_0 vérifiant (116), puis prenons $l' > l_0 + L$, L étant un nombre positif fixe. Pour $x > l'$ et P dans D_{l_0} on a, d'après [II, C, 2] :

$$G < \delta_1 e^{-\pi(x-\xi)} < \delta_1 e^{-\pi(l'-l_0)},$$

δ_1 étant une constante lorsque L est fixé.

Alors :

$$\iint_{D_{l_0}} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta < \delta_1 e^{-\pi(l'-l_0)} \iint_{D_{l_0}} k_2 e^{-|\xi|} d\xi d\eta < 2\delta_1 k_2 e^{-\pi(l'-l_0)}.$$

Pour que l'on ait :

$$(117) \quad \iint_{D_{l_0}} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta < \frac{\varepsilon}{2},$$

il suffit que :

$$l' > l_0 + \frac{1}{\pi} \text{Log} \frac{4k_2\delta_1}{\varepsilon}.$$

(1) PICARD. — *Leçons sur quelques problèmes aux limites des équations différentielles*, 1930, pp. 129 et suiv.

Dans ces conditions, on voit, en additionnant (116) et (117), que $I(x, y)$ est bien inférieur à ε ⁽¹⁾.

Finalement, lorsque M tend vers un point de $(Ox + \Sigma)$ ou vers l'infini, la fonction harmonique (115) prend les mêmes valeurs que $f(x, y)$. On a démontré qu'une telle fonction était unique [II, B, 2]; elle a été désignée par $h(x, y)$ [II, B, 8]. Donc, $f(x, y)$ est solution de l'équation intégrale :

$$(118) \quad h(x, y) = f(x, y) + \frac{\lambda}{2\pi} \iint_D \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta;$$

d) *Remarques.*

α) Soit à chercher dans D , une solution régulière, $u(x, y)$, de l'équation $\Delta u = 1$, s'annulant sur $(Ox + \Sigma)$ et bornée à l'infini. En posant :

$$(119) \quad u(x, y) = \frac{y^2 - y}{2} + u_1(x, y),$$

on est ramené à la détermination d'une fonction harmonique, $u_1(x, y)$ bornée à l'infini, prenant les valeurs zéro sur les parties rectilignes de $(Ox + \Sigma)$ et $\frac{y - y^2}{2}$ sur l'arc Γ . D'après les théorèmes déjà démontrés, u_1 existe, elle est unique, elle est positive dans D . On démontre, d'autre part, comme ci-dessus, que :

$$u = -\frac{1}{2\pi} \iint_D G d\xi d\eta.$$

D'où la relation :

$$(120) \quad \iint_D G d\xi d\eta = \pi(y - y^2) - 2\pi u_1.$$

La fonction $\varphi(y) = \frac{y - y^2}{2}$ possède les propriétés (29). Donc [II, B, 8], il existe une constante positive s'' telle que :

$$0 < u_1 < s'' e^{-|x|} \quad \text{dans} \quad D.$$

On encadre ainsi l'intégrale (120) :

$$\pi(y - y^2) - 2\pi s'' e^{-|x|} < \iint_D G d\xi d\eta \leq \pi(y - y^2).$$

(1) On peut également utiliser la relation $G \leq G_i$. Alors :

$$\iint_D \frac{f}{\eta^2} G d\xi d\eta \leq \iint_D \frac{f}{\eta^2} G_i d\xi d\eta \leq \iint_{D_i} \frac{f}{\eta^2} G_i d\xi d\eta.$$

On montre directement que cette dernière intégrale tend vers zéro lorsque x devient infini.

(2) Une autre méthode consiste à partir de :

$$h_n(x, y) = f_n(x, y) + \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Delta_n} \frac{f}{\eta^2} G_n d\xi d\eta,$$

et à utiliser les convergences uniformes de h_n, f_n, G_n .

D'où la propriété suivante montrant que les points à l'infini ne jouent pas le même rôle que les autres :

— lorsque $M(x, y)$ s'éloigne indéfiniment dans D sur la parallèle à Ox d'ordonnée y , l'intégrale :

$$\iint_D G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad \text{tend vers} \quad \pi(y - y^2).$$

Enfin, signalons que pour D_i , la fonction u_1 est identiquement nulle. D'où :

$$u_i = \frac{y^2 - y}{2},$$

et :

$$\iint_{D_i} G_i d\xi d\eta = \pi(y - y^2);$$

β) d'un autre côté, proposons-nous de chercher, dans D , une solution de l'équation :

$$\Delta \mathcal{F}(x, y) = \mathcal{R}(y) \mathcal{F}(x, y) + \mathcal{R}_1(y)$$

régulière, bornée à l'infini, s'annulant sur les droites $y = 0$, $y = 1$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ étant deux fonctions de y continues sur le segment $[0, 1]$.

S'il existe une solution fonction de y seulement, elle vérifie l'équation intégrale :

$$\mathcal{F}(y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{D_i} \mathcal{F}(\eta) \mathcal{R}(\eta) G_i d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi} \iint_{D_i} \mathcal{R}_1(\eta) G_i d\xi d\eta$$

(même démonstration que pour la solution f du problème $\mathcal{F}'$), ou :

$$\mathcal{F}(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \mathcal{F}(\eta) \mathcal{R}(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} G_i d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \mathcal{R}_1(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} G_i d\xi.$$

Or, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} G_i d\xi$ ne dépend pas de x , et elle peut être calculée par l'intermédiaire de sa dérivée par rapport à y . On trouve :

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i d\xi = K(y, \eta) = \begin{cases} (y-1)\eta & \text{si } 0 \leq \eta \leq y, \\ (\eta-1)y & \text{si } y \leq \eta \leq 1. \end{cases}$$

Alors $\mathcal{F}(y)$ vérifie :

$$(121) \quad \mathcal{F}(y) = \int_0^1 \mathcal{F}(\eta) \mathcal{R}(\eta) K(y, \eta) d\eta + \int_0^1 \mathcal{R}_1(\eta) K(y, \eta) d\eta.$$

On retrouve l'équation de Fredholm donnant les solutions de l'équation :

$$\frac{d^2 \mathcal{F}(y)}{dy^2} = \mathcal{R}(y) \mathcal{F}(y) + \mathcal{R}_1(y)$$

s'annulant pour $y = 0$ et pour $y = 1$ (1).

Ainsi, le noyau $K(y, \eta)$ et l'équation (121) elle-même, peuvent être obtenus grâce au problème résolu ici.

2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS (22), (25), (26).

a) Soit $F(x, y)$ une fonction régulière dans D , mais, pour le moment, absolument quelconque en dehors de cette propriété, et soit $F_0(x, y)$ une solution particulière de l'équation (25), régulière et différente de zéro en tout point de D . Désignons par T un domaine borné et fermé, complètement intérieur à D , de frontière T^* .

La formule de Green appliquée aux fonctions F et F_0 dans ce domaine T , conduit à la relation :

$$\iint_T F_0 \left(\Delta F - \frac{\lambda F}{y^2} \right) dx dy + \int_{T^*} \left(F_0 \frac{dF}{dn} - F \frac{dF_0}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

les dérivées étant prises sur la normale intérieure.

Or, les expressions $F_0, \Delta F - \frac{\lambda F}{y^2}$, sont continues en tout point de D . Si, en un point M , la deuxième n'est pas nulle, elle est, par exemple, du signe de F_0 ; le produit $F_0 \left(\Delta F - \frac{\lambda F}{y^2} \right)$ est également positif dans un petit domaine entourant M ; l'intégrale double appliquée à ce domaine est positive.

Donc, pour que F soit solution de l'équation (25), il faut et il suffit que l'on ait :

$$(122) \quad \int_{T^*} \left(F_0 \frac{dF}{dn} - F \frac{dF_0}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

quel que soit T^* .

En prenant $F_0 = y^{1+\frac{k}{2}}$, puis $F_0 = y^{-\frac{k}{2}}$, la relation caractérisant les solutions régulières de (25) devient :

$$(123) \quad \int_{T^*} y^{\frac{k}{2}} \left[y \frac{dF}{dn} - \left(1 + \frac{k}{2} \right) F \frac{dy}{dn} \right] d\sigma = 0;$$

$$(124) \quad \int_{T^*} y^{1-\frac{k}{2}} \left[y \frac{dF}{dn} + \frac{k}{2} F \frac{dy}{dn} \right] d\sigma = 0,$$

quel que soit T^* .

(1) GOURSAT. — Cours d'analyse, t. III, 1942, pp. 494-495.

Ces relations s'appliquent en particulier à la fonction $f(x, y)$ du problème $\mathcal{P}$. Mais, dans ce cas, f s'annule sur Ox comme $y^{1+\frac{k}{2}}$, la dérivée $\frac{df}{dn}$ existe sur Ox et elle s'y annule comme $y^{\frac{k}{2}}$. Par suite, les relations (123) et (124) s'appliquent à f , même si T^* contient une partie de Ox ;

b) $U(x, y)$ étant une fonction régulière dans D , posons $F = Uy^{-\frac{k}{2}}$. Cette fonction F est alors régulière dans tout domaine T intérieur à D . Pour que U soit, dans D , solution de l'équation (22), il faut et il suffit que F soit solution de l'équation (25), c'est-à-dire que l'on ait les relations (122), (123) ou (124). Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait, par exemple, l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes obtenues par substitution :

$$(125) \quad \int_{T^*} \left[y \frac{dU}{dn} - (1+k) U \frac{dy}{dn} \right] d\sigma = 0;$$

$$(126) \quad \int_{T^*} y^{-k} \frac{dU}{dn} d\sigma = 0,$$

quel que soit T^* .

La solution du problème $\mathcal{P}$ vérifie les relations (125), (126), même si un morceau de T^* fait partie de Ox ;

c) enfin, on peut raisonner pour S [(24), (26)] comme pour U . On obtient :

— pour qu'une fonction $S(x, y)$ régulière dans D soit solution de l'équation (26) il faut et il suffit que l'on ait l'une ou l'autre des deux identités suivantes :

$$(127) \quad \int_{T^*} y^{k+2} \frac{dS}{dn} d\sigma = 0;$$

$$(128) \quad \int_{T^*} \left[y \frac{dS}{dn} + (k+1) S \frac{dy}{dn} \right] d\sigma = 0,$$

quel que soit T^* ;

d) les relations ainsi obtenues généralisent aux intégrales régulières de (22), (25), (26), la propriété connue des fonctions harmoniques.

On peut en tirer diverses conséquences, par exemple que *les intégrales de (22) ne peuvent passer par un maximum ou par un minimum dans D* . En effet, si en M_0 U était maximum par exemple, on pourrait entourer ce point par un contour T^* sur lequel la dérivée $\frac{dU}{dn}$ serait positive ou nulle sans être constamment nulle. L'intégrale $\int_{T^*} y^{-k} \frac{dU}{dn} d\sigma$ serait positive, ce qui est contraire à la relation (126).

D. — AUTRE POINT DE DÉPART

Jusque-là, le domaine D était imposé.

Une autre idée consiste à se donner, *a priori*, une solution $U(x, y)$ de l'équation (22) (par exemple), régulière, bornée à l'infini, s'annulant sur Ox , et à prendre comme deuxième ligne limitant le domaine la courbe d'équation :

$$U(x, y) = 1.$$

On peut, par exemple, chercher une solution représentée par la série convergente :

$$(129) \quad a_1(x)y + \dots + a_i(x)y^i + \dots \quad (i, \text{ entier positif}),$$

les a étant des fonctions de x admettant des dérivées secondes continues.

En nous bornant, par exemple, au cas de la torsion ($k = 3$), nous obtenons, par substitution de (129) dans l'équation (22), les relations de récurrence :

$$a_1(x) = a_2(x) = 0, \quad a_i(x) = -\frac{\frac{d^2 a_{i-2}}{dx^2}}{i(i-4)}.$$

On peut alors calculer tous les coefficients de proche en proche, en fonction de $a_4(x)$, qui reste donc arbitraire (sous condition de convergence). On trouve la solution :

$$\begin{aligned} u(x, y) = y^4 \left[a_4(x) - \frac{y^2}{2 \cdot 6} \frac{d^2 a_4}{dx^2} + \frac{y^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{d^4 a_4}{dx^4} - \dots \right. \\ \left. + (-1)^\mu \frac{y^{2\mu}}{2 \cdot 4 \dots 2\mu \cdot 6 \cdot 8 \dots (2\mu + 4)} \frac{d^{2\mu} a_4}{dx^{2\mu}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

En particulierisant a_4 , on peut ainsi résoudre le problème de la torsion pour la poutre dont la méridienne a pour équation $u = 1$.

TROISIÈME PARTIE

CHAPITRE IV

DÉRIVÉES ET TENSIONS

Dans cette troisième partie nous avons surtout en vue l'étude des tensions et plus particulièrement des tensions sur la surface de l'arbre. Aussi, prendrons-nous uniquement $k = 3$ et $\varphi(y) = \frac{1-y^4}{y^{3/2}}$ (1). Le cas du domaine D_c sera examiné d'une façon spéciale.

Nous utiliserons l'équation intégrale (118). Cela nous amènera à étudier les dérivées de la fonction harmonique $h(M)$ (§ A), puis de l'intégrale $I(M)$ (§ B). Nous en déduirons des conséquences pour les dérivées de f et pour les tensions (§ C).

L'étude de la dérivée normale de f ou de U sur Ox est immédiate grâce aux limitations obtenues dans les paragraphes [III, A, 3] et [III, B, 3]. L'intérêt se porte ici sur Σ . Aussi utiliserons-nous la plupart du temps les axes O_1XY . Les fonctions telles que h , f , etc., seront encore désignées chaque fois qu'aucune ambiguïté ne sera à craindre par $h(X, Y)$, $f(X, Y)$, etc., X, Y étant les nouvelles coordonnées de $M(x, y)$.

A. — DÉRIVÉES DE LA FONCTION h

1 La fonction h prend sur Σ la valeur $\frac{1-(1-Y)^4}{(1-Y)^{3/2}} = \Phi(Y)$ que l'on peut développer en série suivant les puissances croissantes de Y pour $0 \leq Y \leq p$. Les deux premiers termes non nuls de ce développement sont $4Y$ et $\frac{5}{2}Y^3$. On est ainsi amené à comparer h aux fonctions $H_1(X, Y)$, $H_3(X, Y)$, harmoniques dans D , s'annulant sur Ox , bornées à l'infini et prenant les valeurs Y , Y^3 sur Σ . Ces deux fonctions ne sont pas explicitement connues en général. Dans le cas où l'ordonnée de Ox est infinie positive (domaine $\mathcal{D}$), les fonctions harmoniques régulières à l'infini et prenant sur Σ les valeurs Y , Y^3 et $\Phi(Y)$ seront désignées par $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}$; si Γ est un demi-cercle Γ_c , elles seront $\mathcal{H}_{1c}$, $\mathcal{H}_{3c}$, $\mathcal{H}_c$.

Une inversion de centre O_1 et de puissance q^2 transforme $\mathcal{D}$ en un domaine $\mathcal{D}'$ limité par le segment AB et par l'arc $AS'B$ inverse de l'arc ASB . Les trois fonctions $\mathcal{H}_1$,

(1) La plupart des propriétés obtenues se généralisent à k positif quelconque et $\varphi(y)$ donnée par (29).

$\mathcal{H}_3, \mathcal{H}$, deviennent $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_3, \mathcal{H}'$, harmoniques dans $\mathcal{D}'$, prenant sur le contour des valeurs déterminées formant des suites continues (sauf peut-être en O). Mais en utilisant le théorème de Zaremba, on voit que ces fonctions prennent la valeur zéro en O. On en déduit l'existence et l'unicité de $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_3, \mathcal{H}'$ (visiblement $\mathcal{H}'_1 = Y$), et par suite de $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}$. On voit, en outre, que celles-ci sont positives dans $\mathcal{D}$.

Les trois fonctions harmoniques $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_3, \mathcal{H}'$, s'annulant sur AB, peuvent être prolongées par symétrie (1) à travers AB (extrémités A, B exceptées). Si M est un point de $\mathcal{D}'$, $\bar{M}$ son symétrique par rapport à AB, la valeur en $\bar{M}$ de la fonction prolongée de $\mathcal{H}$, par exemple, est $-\mathcal{H}(M)$. Dans le cas de $\mathcal{D}_c$ la détermination de ces trois fonctions (fonctions initiales + prolongements) se ramène au problème ordinaire de Dirichlet pour le cercle de diamètre AB. En revenant à la première figure par la même inversion, on en déduit en particulier :

$$(130) \quad \begin{cases} \mathcal{H}_{1c} = \frac{q^2 Y}{X^2 + Y^2}; \\ \mathcal{H}_{3c} = -\frac{3}{4} \frac{q^6 X^2 Y}{(X^2 + Y^2)^3} + \frac{1}{4} \frac{q^6 Y^3}{(X^2 + Y^2)^3} + \frac{3}{4} \frac{q^4 Y}{X^2 + Y^2}. \end{cases}$$

2 D'après le chapitre [II, B] les fonctions H_1, H_3 existent et sont uniques; elles sont positives dans D et s'annulent à l'infini. D'après le paragraphe précédent, les différences :

$$H_1 - \mathcal{H}_1, \quad H_3 - \mathcal{H}_3, \quad h - \mathcal{H}$$

sont négatives sur Ox et nulles sur Σ ; elles s'annulent à l'infini.

Donc :

$$(131) \quad H_1 < \mathcal{H}_1, \quad H_3 < \mathcal{H}_3, \quad h < \mathcal{H}, \quad \text{dans } D.$$

Les valeurs prises par $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}, H_1, H_3, h$ sur tout arc Γ_1 et sur les demi-droites Θ , forment des fonctions ayant des dérivées secondes par rapport à l'abscisse curviligne; l'arc a une courbure finie continue. Cela suffit pour affirmer que $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}, H_1, H_3, h$ ont des dérivées normales sur chacune de ces lignes (extrémités exclues). Et, en égard aux inégalités (131), on a :

$$(132) \quad \frac{dH_1}{dn} < \frac{d\mathcal{H}_1}{dn}, \quad \frac{dH_3}{dn} < \frac{d\mathcal{H}_3}{dn}, \quad \frac{dh}{dn} < \frac{d\mathcal{H}}{dn}$$

sur tout arc Γ_1 et sur les demi-droites Θ .

3 DÉRIVÉES SUR LES DEMI-DROITES Θ .

a) h est positive dans D et nulle sur Θ , donc la dérivée $\frac{dh}{dn}$ est positive sur Θ :

$$(133) \quad \left(\frac{dh}{dn} \right)_{\Theta} > 0;$$

(1) Par exemple : GOURSAT, *Cours d'analyse*, t. III, 1942, pp. 129 et suiv.

b) d'autre part, on peut trouver une constante positive N telle que, pour $0 \leq Y \leq p$ (p étant lui-même inférieur ou égal à un nombre fixe inférieur à un), on ait :

$$(134) \quad 4Y + \frac{5}{2}Y^3 \leq \Phi(Y) \leq 4Y + NY^3.$$

Comme ci-dessus, on voit qu'à l'intérieur de D on a :

$$4H_1 + \frac{5}{2}H_3 < h < 4H_1 + NH_3,$$

et par suite :

$$(135) \quad 4\left(\frac{dH_1}{dn}\right)_\Theta + \frac{5}{2}\left(\frac{dH_3}{dn}\right)_\Theta < \left(\frac{dh}{dn}\right)_\Theta < 4\left(\frac{dH_1}{dn}\right)_\Theta + N\left(\frac{dH_3}{dn}\right)_\Theta < 4\left(\frac{d\mathcal{H}_1}{dn}\right)_\Theta + N\left(\frac{d\mathcal{H}_3}{dn}\right)_\Theta;$$

c) dans le cas de D_c , on connaît $\mathcal{H}_{1c}$, $\mathcal{H}_{3c}$ données par (130). On obtient ainsi :

$$(136) \quad \left(\frac{dh_c}{dn}\right)_{\Theta_c} < 4\frac{q^2}{X^2} + \frac{3}{4}N\frac{q^4}{X^2}\left(1 - \frac{q^2}{X^2}\right).$$

On en déduit les conséquences suivantes :

α) si X augmente indéfiniment, $\left(\frac{dh_c}{dn}\right)_{\Theta_c}$ tend vers zéro comme $\frac{1}{X^2}$ au moins;

β) si q est inférieur à $\frac{2}{3}$, la dérivée $\left(\frac{dh_c}{dn}\right)_{\Theta_c}$ est inférieure à 4, car le deuxième membre de (136) croît avec $|X|$ pour $|X| \geq q$;

γ) M étant un point fixe de Θ_c , la dérivée $\frac{dh_c}{dn}$ en ce point tend vers zéro lorsque le rayon q tend vers zéro.

Application numérique.

Pour $q \leq \frac{1}{8}$ on peut prendre $N = \frac{7}{2}$.

4 DÉRIVÉES AUX COINS A ET B.

Je suppose ici que l'arc IA de Γ aboutissant en A soit normal à AX . Soient $\bar{IA}$ et $\bar{D}$ les symétriques de IA et de D par rapport à O_1X . A tout point $(X, -Y)$ de $\bar{D}$ faisons correspondre la fonction $\bar{h} = -h(X, Y)$. D'après un résultat rappelé tout à l'heure, la fonction $\bar{h}$ égale à h dans D et à $\bar{h}$ dans $\bar{D}$ est harmonique dans $\bar{\bar{D}}$ ($D + \bar{D} +$ demi-droite AX). Elle prend sur l'arc $IA\bar{I}$ des valeurs formant une fonction ayant en tout point de l'arc (A compris, $I, \bar{I}$ exclus) une dérivée seconde par rapport à l'abscisse curviligne de ce point; l'arc a une courbure finie continue. Donc la fonction $\bar{h}$ a des dérivées qui tendent vers des limites finies bien déterminées lorsque le point $M(X, Y)$ de $\bar{D}$ tend vers un point de l'arc $IA\bar{I}$ (extrémités exclues); et ces limites sont continues le long de cet arc.

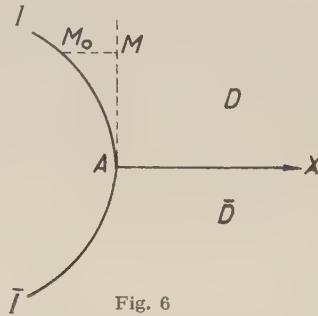
Supposons que M , de la demi-droite AX , tende vers A . La dérivée $\frac{\partial \bar{h}}{\partial X}$ (ou $\frac{\partial h}{\partial X}$) est constamment nulle. La dérivée normale en A (pour $\bar{D}$) est donc nulle. Or, c'est la limite de la dérivée normale en un point de l'arc AI lorsque ce point tend vers A . D'où :

— si le point $\dot{M}$ de l'arc IA tend vers A , la dérivée $\frac{dh}{dn}$ en ce point tend vers zéro.

De même, soit $M(q, Y)$ (fig. 6), un point de D ayant même abscisse que A et d'ordonnée Y petite, et soit M_0 le point de même ordonnée Y , situé sur l'arc IA et voisin de A . Il existe sur le segment de droite $M_0 M$ un point M_1 tel que :

$$(137) \quad h(M) - h(M_0) = M_0 M \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)_{M_1}.$$

Lorsque Y tend vers zéro, $\left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)_{M_1}$ tend vers zéro d'après ce qui vient d'être remarqué.



Or, $\frac{h(M_0)}{Y}$ tend vers 4, dérivée de $\Phi(Y)$ pour $Y = 0$. Donc, $\frac{h(M)}{Y}$ tend également vers 4, et par suite $\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial Y} \right)_A = 4$. Cette dérivée est de même la limite de $\frac{\partial h}{\partial Y}$ lorsque le point M de AX tend vers A . D'où :

— si un point de la demi-droite AX tend vers A , la dérivée $\frac{dh}{dn}$ en ce point tend vers 4.

En particulier, pour D_c avec $q < \frac{2}{3}$ on obtient, d'après [IV, A, 3, β] : $\left(\frac{dh_c}{dn} \right)_{\theta_c}$ est maximum en A et égal à 4.

5 DÉRIVÉE SUR L'ARC Γ DANS LE CAS DU DEMI-CERCLE Γ_c .

a) Nous nous proposons d'abord de démontrer une propriété générale qui peut être utilisée dans d'autres questions.

Soit $v(M)$ la fonction harmonique dans le cercle (O_1) (fig. 7) : $X^2 + Y^2 < q^2$ et prenant en P_0 de la frontière O_1^* , d'angle polaire θ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$), la valeur $u(\theta)$ donnée sur laquelle nous faisons les hypothèses suivantes :

— elle est continue, impaire, symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$ et à $-\frac{\pi}{2}$, convexe vers le haut ⁽¹⁾ et croissante dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, enfin nulle pour $\theta = 0$.

(1) VALIRON. — *Théorie des fonctions*, 1948, p. 79.

Nous n'envisagerons que le cas $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, tous les autres se ramenant à celui-ci.

ψ étant dans l'intervalle (θ, π) , désignons par P le point de la circonférence O_1^* ayant ψ pour angle polaire et par P' (d'angle polaire $2\theta - \psi$) son symétrique par rapport à la droite $O_1 P_0$:

α) lorsque ψ est inférieur ou égal à 2θ , $2\theta - \psi$ est supérieur ou égal à zéro, donc u étant convexe dans l'intervalle $(0, \pi)$ il vient :

$$u(\psi) - u(\theta) \leq u(\theta) - u(2\theta - \psi).$$

Démontrons les mêmes inégalités lorsque $2\theta < \psi \leq \pi$. Dans ce cas on a : $2\theta - \pi \leq 2\theta - \psi < 0$, et, à cause de l'impairité : $u(2\theta - \psi) = -u(\psi - 2\theta)$. Or,

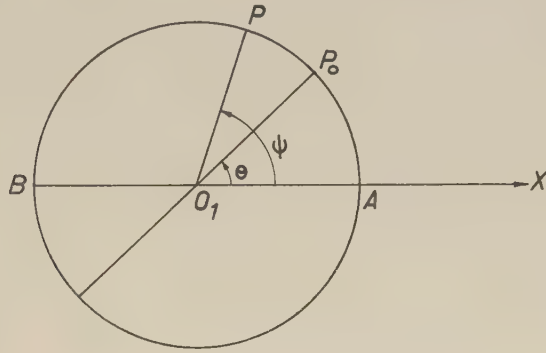


Fig. 7

les trois nombres ψ , $\psi - 2\theta$, 2θ étant dans l'intervalle $(0, \pi)$, et u étant convexe dans cet intervalle, de l'égalité $\psi - (\psi - 2\theta) = 2\theta$ il résulte :

$$u(\psi) - u(\psi - 2\theta) < u(2\theta) < 2u(\theta)$$

d'où, quel que soit ψ de l'intervalle (θ, π) :

$$(138) \quad \underline{u(\psi) - u(\theta) \leq u(\theta) - u(2\theta - \psi);}$$

β) soit alors M un point du rayon $O_1 P_0$. On sait que :

$$(139) \quad v(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(t) \frac{q^2 - \rho^2}{r^2} dt$$

$$|\rho = O_1 M, \quad r^2 = q^2 + \rho^2 - 2q\rho \cos(t - \theta)|.$$

Or, la fonction harmonique prenant en tous les points de O_1^* la valeur constante $u(\theta)$, P_0 étant fixé, est :

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(t) \frac{q^2 - \rho^2}{r^2} dt,$$

d'où :

$$(140) \quad v(M) - v(P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [u(t) - u(\theta)] \frac{q^2 - \rho^2}{r^2} dt.$$

Dans l'intervalle $(-\pi, -\pi + 2\theta)$, la différence $u(t) - u(\theta)$ est négative ou nulle. Par suite :

$$v(M) - v(P_0) < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+2\theta}^0 [u(t) - u(\theta)] \frac{q^2 - \rho^2}{r^2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [u(t) - u(\theta)] \frac{q^2 - \rho^2}{r^2} dt,$$

somme négative d'après la relation (138).

On en déduit les propriétés suivantes :

$$(141) \quad \underline{v(M) < v(P_0)}.$$

Si $v(M)$ a en P_0 une dérivée normale, cette dérivée est négative ou nulle.

Naturellement, si P_0 est sur la droite $O_1 X$, $v(M)$ a en ce point une dérivée normale nulle;

b) Conséquences pour $\left(\frac{d\mathcal{H}_c}{dn}\right)_{\Gamma_c}$ et pour $\left(\frac{dh_c}{dn}\right)_{\Gamma_c}$ lorsque le rayon q est au plus égal à $\frac{1}{3}$.

Le demi-cercle Γ_c forme avec son symétrique $\overline{\Gamma_c}$ par rapport à $O_1 X$, le cercle (O_1) . La fonction $\mathcal{H}'_c$ et son prolongement dans le demi-cercle inférieur forment une fonction harmonique $\overline{\mathcal{H}'_c}$ à l'intérieur de (O_1) , prenant en $P_0(X, Y)$ de l'arc Γ_c ou de $\overline{\Gamma_c}$, respectivement, les valeurs $\Phi(Y)$ et $-\Phi(-Y)$. Soit θ , de l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, l'angle polaire de P_0 . Posons :

$$\begin{cases} u(\theta) = \Phi(Y) & \text{sur } \Gamma_c, \\ u(\theta) = -\Phi(-Y) & \text{sur } \overline{\Gamma_c}. \end{cases}$$

On vérifie que la fonction $u(\theta)$ ainsi définie possède toutes les propriétés du paragraphe ci-dessus [5, a)]. Par suite, en tout point de Γ_c , on a $\frac{d\mathcal{H}'_c}{dn} \leq 0$. L'inversion (O_1, q^2) déjà utilisée permet d'écrire :

$$\left(\frac{d\mathcal{H}_c}{dn}\right)_{\Gamma_c} \leq 0.$$

Et grâce aux relations (132) on obtient :

$$(142) \quad \left(\frac{dh_c}{dn}\right)_{\Gamma_c} < 0,$$

tout au moins pour $q \leq \frac{1}{3}$.

6 ENCADREMENT DE $\frac{dh}{dn}$ AU SOMMET S DE Γ .

Nous supposons ici que S est à l'intérieur d'un arc Γ_1 , si bien que $\frac{dh}{dn}$ existe en ce point.

Bornons-nous, par exemple, à $p \leq \frac{1}{8}$. Pour $0 \leq Y \leq p$ on a :

$$4Y + \frac{5}{2}Y^3 \leq \Phi(Y) \leq 4Y + \frac{7}{2}Y^3.$$

Chacune des différences :

$$(143) \quad \Phi(Y) - 4Y - \frac{5}{2}Y^3, \quad 4Y + \frac{7}{2}Y^3 - \Phi(Y)$$

est, pour $Y \leq \frac{1}{8}$, une fonction croissante de Y . Donc, les fonctions harmoniques :

$$(144) \quad h - 4H_1 - \frac{5}{2}H_3, \quad 4H_1 + \frac{7}{2}H_3 - h$$

ont sur $(\Sigma + Ox)$ un maximum en S . Par suite, elles sont inférieures à ce maximum dans D , et en S leurs dérivées normales sont négatives. Donc :

$$(145) \quad \underline{4\left(\frac{dH_1}{dn}\right)_s + \frac{7}{2}\left(\frac{dH_3}{dn}\right)_s < \left(\frac{dh}{dn}\right)_s < 4\left(\frac{dH_1}{dn}\right)_s + \frac{5}{2}\left(\frac{dH_3}{dn}\right)_s}.$$

On peut également encadrer $\left(\frac{dh}{dn}\right)_s$ uniquement en fonction de H_1 . Cela est intéressant, par exemple, dans le cas du domaine D_b où la fonction H_1 seule est explicitée [II, D, (79')].

En effet, la fonction $p^2H_1 - H_3$ prend sur $(Ox + \Sigma)$ des valeurs positives ou nulles. Elle est donc positive dans D . Comme elle est nulle en S , sa dérivée normale en ce point est positive et :

$$(146) \quad \left(\frac{dH_3}{dn}\right)_s < p^2\left(\frac{dH_1}{dn}\right)_s.$$

D'autre part, la fonction $3p^2H_1 - H_3$ prend sur $(Ox + \Sigma)$ des valeurs positives ou nulles dont le maximum est obtenu en S . En ce point, la dérivée normale est négative et :

$$(147) \quad \left(\frac{dH_3}{dn}\right)_s > 3p^2\left(\frac{dH_1}{dn}\right)_s.$$

En tenant compte des relations (146) et (147) la double relation (145) devient :

$$(148) \quad \underline{\left(4 + \frac{21}{2}p^2\right)\left(\frac{dH_1}{dn}\right)_s < \left(\frac{dh}{dn}\right)_s < \left(4 + \frac{5}{2}p^2\right)\left(\frac{dH_1}{dn}\right)_s}.$$

Lorsque Γ est un demi-cercle, on peut faire un peu mieux, car on connaît $\mathcal{H}_{1c}$ et $\mathcal{H}_{3c}$. D'une part, on a :

$$(149) \quad \left(\frac{dH_3}{dn}\right)_s < \left(\frac{d\mathcal{H}_3}{dn}\right)_s = -\frac{3}{2}q^2.$$

D'autre part, les fonctions :

$$\frac{3}{2}q^2 H_1 - H_3 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}q^2 \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_3$$

prennent sur Σ la même valeur; sur Ox la différence $\frac{3}{2}q^2 \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_3$ est positive, donc supérieure à $\frac{3}{2}q^2 H_1 - H_3$. Par suite, au sommet, on a :

$$\frac{3}{2}q^2 \left(\frac{dH_{1c}}{dn} \right)_s - \left(\frac{dH_{3c}}{dn} \right)_s < \frac{3}{2}q^2 \left(\frac{d\mathcal{H}_{1c}}{dn} \right)_s - \left(\frac{d\mathcal{H}_{3c}}{dn} \right)_s = 0$$

et :

$$(150) \quad \left(\frac{dH_{3c}}{dn} \right)_s > \frac{3}{2}q^2 \left(\frac{dH_{1c}}{dn} \right)_s,$$

améliorant ainsi (147). Des relations (145), (149), (150), on déduit alors :

$$(151) \quad \left(4 + \frac{21}{4}q^2 \right) \left(\frac{dH_{1c}}{dn} \right)_s < \left(\frac{dh_c}{dn} \right)_s < 4 \left(\frac{dH_{1c}}{dn} \right)_s - \frac{15}{4}q^2.$$

EXEMPLE. — Prenons le cas de D_a [II, D, 2, a)] avec $\frac{p}{R} = \frac{1}{8}$. En nous ramenant à $R = 1$ (ce qui correspond à un changement d'unité) on trouve en utilisant, par exemple, la représentation conforme :

$$\left(\frac{dH_{1a}}{dn} \right)_s = -\frac{\mu_1}{\mu} = -1,026 \quad (\text{à } 0,0005 \text{ près}).$$

D'où, grâce à (148) :

$$(152) \quad -4,27 < \left(\frac{dh_a}{dn} \right)_s < -4,14.$$

Admettons que les relations (151) s'appliquent à ce cas. On trouve, au degré d'approximation ainsi adopté (qui est tout de même excellent quant aux courbes) :

$$(153) \quad -4,188 < \left(\frac{dh_a}{dn} \right)_s < -4,162.$$

7 INFLUENCE DES DIMENSIONS DE L'ENCOCHE.

a) D'un domaine D_c enlevons un domaine partiel dont une partie de la frontière est portée par Γ_c (par exemple, celui hachuré sur la *fig. 8*), de façon que le domaine restant soit un domaine D . Soient M un point quelconque de Γ_c , M' et μ deux points de l'arc Γ correspondant au nouveau domaine D , situés respectivement sur la parallèle à $O_1 X$ issue de M et sur la demi-droite $O_1 M$. D'après ce qui précède, on a :

$$(154) \quad h_c(\mu) \leq h_c(M) = h(M') \leq h(\mu).$$

Donc, sur D^* entier, on a $h_c \leq h$. D'où les conséquences :

α) sur les parties communes à D^* et à D_c^* (en particulier sur Ox et sur les demi-droites Θ) on a $h_c = h$. D'où, sur ces parties communes :

$$(155) \quad \frac{dh_c}{dn} < \frac{dh}{dn}.$$

Si, sur un domaine D_c , on agrandit l'encoche Γ_c , de façon à former un domaine D , la dérivée normale de la fonction h augmente sur tout arc de D_c^* faisant partie de D^* .

On a déjà vu que si le rayon de Γ_c tend vers zéro, la dérivée $\frac{dh}{dn}$ en tout point de Ox ou de Θ tend vers zéro;

β) prenons le cas où Γ est tangent à Γ_c en son sommet S . Les propriétés ci-dessus s'appliquent en S et :

$$(156) \quad \left(\frac{dh_c}{dn}\right)_s < \left(\frac{dh}{dn}\right)_s;$$

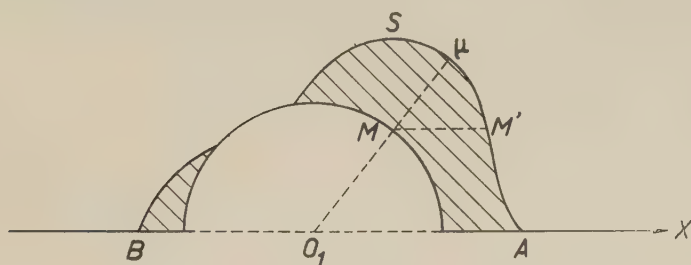


Fig. 8

b) pour D_c , on a $\left(\frac{d\mathcal{H}_{1c}}{dn}\right)_s = -1$. Montrons que $\left(\frac{dH_{1c}}{dn}\right)_s$ tend vers -1 lorsque le rayon $p = q$ tend vers zéro.

Nous nous proposons même de démontrer la propriété plus générale suivante :

— soient W une fonction harmonique dans D , s'annulant sur Ox , et $\mathcal{W}$ une fonction harmonique dans $\mathcal{D}$, toutes les deux bornées à l'infini, s'annulant sur les demi-droites Θ , prenant la même valeur $\psi(Y)$ ⁽¹⁾ sur l'arc Γ ; $\psi(Y)$ est une fonction de Y ayant une dérivée seconde pour $0 \leq Y \leq 1$, nulle pour $Y = 0$, positive ou nulle dans le reste de l'intervalle. Supposons que le point S soit sur l'axe O_1Y et que les dimensions de Γ tendent vers zéro de façon que cet arc n'ait aucun point intérieur au demi-cercle de centre O_1 et de sommet S . Dans ces conditions, nous allons montrer que :

$$\left(\frac{dW}{dn}\right)_s - \left(\frac{d\mathcal{W}}{dn}\right)_s$$

(1) Il n'y a, naturellement, aucune relation entre cette fonction et les fonctions $\psi(x, y)$ utilisées dans le chapitre III.

tend vers zéro et même, dans le cas où Γ reste un demi-cercle, que :

$$\left(\frac{dW_c}{dn}\right)_{\Sigma_c} - \left(\frac{dW}{dn}\right)_{\Sigma_c}$$

tend vers zéro.

Comme W est inférieur à W dans D et égal à W sur Σ , on a :

$$(157) \quad \left(\frac{dW}{dn}\right)_{\Sigma} < \left(\frac{dW}{dn}\right)_{\Sigma}.$$

Lorsque Y tend vers zéro, $\psi(Y)$ tend vers zéro. Donc, à tout ε positif, on peut faire correspondre $p_0 < 1$ tel que $p < p_0$ entraîne sur l'arc Γ correspondant $\psi(Y) < \varepsilon$. Alors la fonction harmonique $W - W$ est nulle sur Σ , et sur Ox elle est inférieure à ε .

Soit, d'autre part, la fonction harmonique :

$$\delta(Y - \mathcal{H}_1) \quad (\delta, \text{ constante positive})$$

nulle sur Σ et supérieure, sur Ox , à $\delta(1 - p)$. Choisissons δ de façon que $\delta(1 - p)$ soit supérieur à ε (en n'envisageant, par exemple, que les valeurs de p inférieures ou égales à $\frac{1}{2}$; il suffit que l'on ait $\delta = 2\varepsilon$). Alors, la fonction harmonique :

$$W - W - 2\varepsilon(Y - \mathcal{H}_1)$$

est nulle sur Σ et négative sur Ox . On a donc :

$$(158) \quad 0 < \left(\frac{dW}{dn}\right)_{\Sigma} - \left(\frac{dW}{dn}\right)_{\Sigma} < 2\varepsilon \left(\frac{dY}{dn} - \frac{d\mathcal{H}_1}{dn}\right)_{\Sigma}.$$

Lorsque p tend vers zéro, $\left(\frac{dY}{dn}\right)_{\Sigma}$ reste fini. Il en est de même de $\frac{d\mathcal{H}_1}{dn}$ dans les hypothèses de l'énoncé. En effet, dans le cas général, les considérations du paragraphe [7, α , α)] s'appliquent ici, et, en désignant par $\mathcal{H}_{1c}$ la fonction $\mathcal{H}_1$ correspondant au cas où Γ_c est le demi-cercle de centre O_1 et de rayon O_1S , on a :

$$\left(\frac{d\mathcal{H}_{1c}}{dn}\right)_s < \left(\frac{d\mathcal{H}_1}{dn}\right)_s < 0,$$

double inégalité montrant bien que $\left(\frac{d\mathcal{H}_1}{dn}\right)_s$ est bornée.

Dans le cas du demi-cercle, le résultat est évident d'après (130).

Soit donc γ une borne supérieure de $\left(\frac{dY}{dn} - \frac{d\mathcal{H}_1}{dn}\right)_s$ ou de $\left(\frac{dY}{dn} - \frac{d\mathcal{H}_{1c}}{dn}\right)_{\Sigma_c}$. Alors, on peut bien trouver p_0 inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ tel que $p < p_0$ entraîne :

$$\left(\frac{dW}{dn}\right)_s - \left(\frac{dW}{dn}\right)_s < 2\varepsilon\gamma \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dW_c}{dn}\right)_{\Sigma_c} - \left(\frac{dW_c}{dn}\right)_{\Sigma_c} < 2\varepsilon\gamma,$$

ce qui démontre les propositions en vue.

CONSÉQUENCE. — En particulier, les relations (151) montrent que $\left(\frac{dh_c}{dn}\right)_s$ tend vers -4 lorsque le rayon p de Γ_c tend vers zéro.

Nous avons vu que, dans les mêmes conditions, h_c tend vers zéro en tout point de $(D_c + D_c^*)$. D'où une différence essentielle, à ce sujet, entre h_c et $\left(\frac{dh_c}{dn}\right)_s$.

Notons également, comme on l'a vu au cours de la démonstration, que $4\left(\frac{dH_{1c}}{dn}\right)_s$ tend aussi vers -4 . Donc, la discontinuité de $\left(\frac{dh_c}{dn}\right)_s$ est due entièrement à celle de $4\left(\frac{dH_{1c}}{dn}\right)_s$.

8 $\frac{\partial h}{\partial X}, \frac{\partial h}{\partial Y}$ TENDENT VERS ZÉRO LORSQUE M S'ÉLOIGNE INDÉFINIMENT DANS D.

La transformation conforme de D sur le demi-plan D' [II, A] change $h(M)$ en $h'(M')$. Or, h' s'annule sur la demi-droite $A'x'$ (par exemple). On peut la prolonger à travers cette demi-droite et elle a en C' des dérivées premières continues. Lorsque M s'éloigne indéfiniment, $\frac{\partial x'}{\partial X}, \frac{\partial y'}{\partial X}$ tendent vers zéro. Il en est de même de $\frac{\partial h}{\partial X}$ et de $\frac{\partial h}{\partial Y}$.

B. — DÉRIVÉES DE L'INTÉGRALE I (M)

Dans la deuxième partie [III, C], nous avons démontré que l'intégrale :

$$(159) \quad I(M) = \iint_D \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} G d\xi d\eta$$

avait dans D des dérivées premières continues et des dérivées secondes. Ici, nous nous proposons d'étudier les dérivées premières sur la frontière D.

1 DÉRIVÉES DE G SUR $(Ox + \Sigma)$.

Nous garderons les notations du chapitre II et nous utiliserons les résultats obtenus dans ce chapitre.

Soient M_0 un point de $(Ox + \Sigma)$ et M'_0 son homologue dans la représentation conforme (sur le demi-plan D') définie par la relation (32).

a) La fonction :

$$(160) \quad \Lambda = \text{Log} \frac{z' - \overline{\zeta'}}{z' - \zeta'}$$

a une dérivée par rapport à z' , continue en M'_0 . Si M_0 n'est pas un point de jonction de deux arcs de $(Ox + \Sigma)$, G a en M_0 des dérivées par rapport aux coordonnées de M; ces

dérivées sont continues. En particulier, la dérivée normale (par rapport à M) existe en M_0 , et elle est continue. Nous désignerons par :

$$\left[\frac{dG}{dn} \right]_{M_0}$$

cette dérivée normale en M_0 .

Supposons maintenant M_0 en A (ou B), les angles en ces points étant droits par hypothèse. En utilisant la relation (40) et la fonction Λ (160), on obtient de même :

— aux coins A et B (supposés droits), G a des dérivées nulles et continues. La dérivée $\left[\frac{dG}{dn} \right]_{M_0}$ tend vers zéro lorsque M_0 de Γ ou de Θ tend vers A;

b) supposons maintenant P' (ζ') dans D' , le point M' (z') étant quelconque dans $(D' + D'^*)$. La fonction Λ a une dérivée :

$$\frac{d\Lambda}{dz'} = \frac{\bar{\zeta}' - \zeta'}{(z' - \zeta')(z' - \bar{\zeta}')}$$

et :

$$(161) \quad \left| \frac{d\Lambda}{dz'} \right| = \frac{P' \bar{P}'}{M' P' \cdot M' \bar{P}'} \leq \frac{2}{M' P'}.$$

D'où les deux limitations suivantes :

$$(162) \quad \left| \frac{\partial G'}{\partial x'} \right| \leq \frac{2}{M' P'}, \quad \left| \frac{\partial G'}{\partial y'} \right| \leq \frac{2}{M' P'}.$$

On peut généraliser à D. Soit M_0 un point situé sur un arc constitutif de $(Ox + \Sigma)$ ou aux coins A, B. Considérons un cercle de centre M_0 , suffisamment petit pour que tous les points singuliers (1) de Σ (sauf peut-être A, B) lui soient extérieurs et pour qu'il ne coupe pas l'axe Ox . Soient (M_0) la région commune à l'intérieur de ce cercle et à D, $(M_0)^*$ sa frontière. M et P sont distincts, M dans $(M_0) + (M_0)^*$, P dans un domaine D_1 fixe.

D'après (161) on a :

$$\left| \frac{d\Lambda}{dz} \right| \leq \frac{2}{M' P'} \left| \frac{dz'}{dz} \right|.$$

D'autre part, $\left| \frac{dz'}{dz} \right|$ est borné dans $(M_0) + (M_0)^*$. Si P tend vers M, $\left| \frac{dz'}{dz} \right|$ est équivalent à $\frac{M' P'}{MP}$; si la longueur PM n'est pas infiniment petite, il en est de même de $P' M'$, et le rapport $\frac{MP}{M' P'}$ est borné.

Donc, dans les deux cas, c'est-à-dire *quels que soient M et P distincts, M dans $(M_0) + (M_0)^*$, P dans D_1 fixe, il existe une constante positive μ telle que :*

$$\left| \frac{d\Lambda}{dz} \right| < \frac{\mu}{MP},$$

(1) Points de jonction de deux arcs.

et par suite :

$$(163) \quad \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| < \frac{\mu}{MP}, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| < \frac{\mu}{MP}.$$

Ces relations pourraient être démontrées dans des cas plus étendus que celui du texte.

2 EXISTENCE ET EXPRESSION DES DÉRIVÉES NORMALES DE I.

Soit M_0 un point de Σ , non singulier, ou situé en A, B. L'intégrale :

$$(164) \quad \iint_D \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \cdot \frac{\partial G}{\partial x}(M_0, P) d\xi d\eta$$

a un sens d'après la première relation (163) et d'après le comportement de $\frac{\partial G}{\partial x}(M_0, P)$

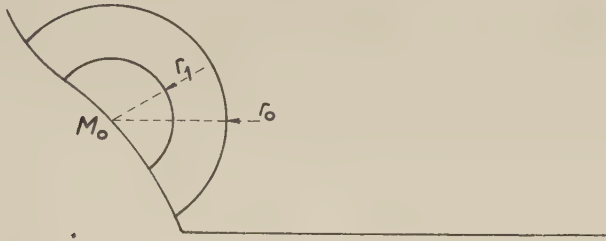


Fig. 9

à l'infini [II, C, 2] valable même si M_0 est sur Σ . Nous nous proposons de démontrer que si M de $(D + D^*)$ tend vers M_0 , la dérivée :

$$(165) \quad \frac{\partial I}{\partial x}(M) = \iint_D \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \cdot \frac{\partial G}{\partial x}(M, P) d\xi d\eta$$

tend vers l'intégrale (164).

Nous pouvons prendre M dans $(M_0) + (M_0)^*$. Chacune des intégrales :

$$(166) \quad \iint_{(M_0)} \left| \frac{\partial G}{\partial x}(M, P) \right| d\xi d\eta, \quad \iint_{(M_0)} \left| \frac{\partial G}{\partial y}(M, P) \right| d\xi d\eta$$

est inférieure à :

$$\iint_{(M_0)} \frac{\mu}{MP} d\xi d\eta.$$

Cette dernière est bornée par l'intégrale de la même fonction étendue au cercle de centre M et de rayon $2r_0$, double de celui de (M_0) . Les intégrales (166) sont donc inférieures à $4\pi\mu r_0$. On peut alors choisir r_0 de façon que chacune d'elles soit inférieure à un nombre positif donné. A partir d'ici, r_0 est ainsi fixé (fig. 9).

Soient l_0 un nombre fixe supérieur à $|x_0 \pm r_0|$ et l un nombre quelconque supérieur à l_0 . Supposons P dans $D - D_l$. Comme au paragraphe [II, C, 2] on montre qu'il existe une constante positive δ_2 telle que :

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| < \delta_2 e^{-\pi |\xi|}.$$

Les intégrales :

$$(167) \quad \iint_{D-D_l} \left| \frac{\partial G}{\partial x} (M, P) \right| d\xi d\eta, \quad \iint_{D-D_l} \left| \frac{\partial G}{\partial x} (M_0, P) \right| d\xi d\eta$$

sont alors inférieures à $\frac{2}{\pi} \delta_2 e^{-\pi l}$. On peut choisir l de façon que chacune de ces intégrales soit arbitrairement petite. Le nombre l est ainsi fixé de cette manière.

Enfin, soit (M_1) la région commune à D et à un cercle de centre M_0 et de rayon r_1 inférieur à r_0 et soit $(M_1)^*$ sa frontière. Plaçons M dans $(M_1) + (M_1)^*$. Si P est dans $D_l - (M_0)$ on a encore les relations (163). De telle sorte qu'en utilisant la continuité de $\frac{\partial G}{\partial x}$ lorsque M tend vers M_0 , on peut continuer comme dans le raisonnement classique rappelé dans le paragraphe [III, C, 1, c)]. On trouve bien que la différence :

$$\iint_D \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \cdot \left[\frac{\partial G}{\partial x} (M, P) - \frac{\partial G}{\partial x} (M_0, P) \right] d\xi d\eta$$

tend vers zéro avec la longueur $M_0 M$.

La même propriété s'applique à la dérivée par rapport à y .

Donc, en M_0 , l'intégrale $I(M)$ a des dérivées qui sont les limites des dérivées en M lorsque M tend vers M_0 .

Si M_0 est sur un arc Γ_1 ou sur Θ , $I(M)$ a une dérivée normale qui est la limite de la dérivée dans la même direction sur un point infiniment voisin de la normale en M_0 . Cette dérivée est :

$$(168) \quad \frac{dI}{dn} (M_0) = \iint \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \left[\frac{dG}{dn} \right]_{M_0} d\xi d\eta.$$

En particulier, plaçons M_0 en A (ou en B), l'angle en ce point étant supposé droit. En utilisant la propriété de $\frac{dG}{dn}$ signalée dans [IV, B, 1] on obtient :

— la dérivée normale en un point M_0 de Σ voisin de A tend vers zéro lorsque M_0 tend vers A .

3 LIMITE DE $\frac{dI}{dn}$ EN S LORSQUE Γ TEND VERS ZÉRO DANS CERTAINES CONDITIONS.

Nous supposons ici que le sommet S correspondant au domaine D soit sur un arc Γ_1 , si bien que la dérivée $\frac{dI}{dn}$ existe en S . Nous admettons également que S a une abscisse

nulle et que l'arc Γ n'a aucun point intérieur au demi-cercle Γ_c de centre O_1 et passant par S. Et nous nous proposons de montrer que si D tend vers D_i en vérifiant constamment ces propriétés, $\frac{dI}{dn}(S)$ tend vers zéro.

$\frac{I}{\eta^2}$ étant inférieur à k_2 (98), qui tend vers zéro avec p , il suffit de démontrer que l'intégrale :

$$\iint_D \left[\frac{dG}{dn} \right]_s d\xi d\eta$$

reste bornée.

$\mathcal{G}_c$ désignant la fonction de Green du domaine $\mathcal{D}_c$ de Joukowski limité par Γ_c , on a :

$$G - \mathcal{G}_c < 0 \quad \text{dans} \quad D,$$

d'où :

$$0 < \left[\frac{dG}{dn} \right]_s < \left[\frac{d\mathcal{G}_c}{dn} \right]_s,$$

et par suite :

$$0 < \iint_D \left[\frac{dG}{dn} \right]_s d\xi d\eta < \iint_D \left[\frac{d\mathcal{G}_c}{dn} \right]_s d\xi d\eta < \iint_{D_c} \left[\frac{d\mathcal{G}_c}{dn} \right]_s d\xi d\eta.$$

Or, $\mathcal{G}_c$ est connue [II, C, 7]. On montre que la dernière intégrale est bornée. D'où la propriété annoncée (1).

4 LES DÉRIVÉES DE $I(M)$ SONT NULLES A L'INFINI.

Il reste à étudier ce que deviennent les dérivées de $I(M)$ lorsque M s'éloigne indéfiniment. Commençons par démontrer que les intégrales :

$$\iint_D \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| d\xi d\eta, \quad \iint_D \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| d\xi d\eta$$

sont bornées lorsque M s'éloigne indéfiniment. Nous prendrons D_i et G_i comme éléments de comparaison.

On a :

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \leq \left| \frac{\partial (G - G_i)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial G_i}{\partial x} \right|.$$

Pour éviter les coefficients, nous adopterons ici la largeur $R = \pi$ pour la bande D_i associée à D .

On connaît :

$$\frac{\partial G_i}{\partial x} = \frac{-\sin y \cdot \sin \eta \cdot \operatorname{sh}(x - \xi)}{[\operatorname{ch}(x - \xi) - \cos(y - \eta)][\operatorname{ch}(x - \xi) - \cos(y + \eta)]}.$$

(1) On peut également utiliser la fonction u_j définie dans la deuxième partie [III, C, d, α].

D'autre part, on a évidemment :

$$\iint_D \left| \frac{\partial G_i}{\partial x} \right| d\xi d\eta < \iint_{D_i} \left| \frac{\partial G_i}{\partial x} \right| d\xi d\eta.$$

La dernière intégrale a un sens, elle ne dépend pas de x , dont elle reste finie lorsque M s'éloigne indéfiniment. Il en est de même de celle qui précède.

Pour étudier $\iint_D \left| \frac{\partial (G - G_i)}{\partial x} \right| d\xi d\eta$ lorsque x tend vers $+\infty$ par exemple, nous prendrons M à l'extérieur d'un domaine D_i fixe, et, par exemple, du côté de C ($x > 0$). Dans D , $\frac{\partial}{\partial x} (G - G_i)$ est une fonction harmonique de P même en M (supposé dans $D - D_i$). Elle s'annule sur les parties communes à D^* et à D_i^* et elle est bornée à l'infini. Sur l'arc Γ , elle prend la valeur :

$$\frac{\sin y \cdot \sin \eta \cdot \operatorname{sh} (x - \xi)}{[\operatorname{ch} (x - \xi) - \cos (y - \eta)] [\operatorname{ch} (x - \xi) - \cos (y + \eta)]}$$

inférieure à :

$$\frac{\operatorname{sh} x}{[\operatorname{ch} (x - q) - 1]^2} \eta_1.$$

$\eta_1 = \pi - \eta$ est l'ordonnée de P dans le système X, Y .

Les considérations de la deuxième partie [II, B, 8] s'appliquent et dans $(D + D^*)$ on a :

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial x} (G - G_i) \leq \delta_3 \frac{\operatorname{sh} x}{[\operatorname{ch} (x - q) - 1]^2} e^{-\left|\frac{\xi}{\pi}\right|}$$

(δ_3 , constante positive).

Donc $\iint_D \left| \frac{\partial (G - G_i)}{\partial x} \right| d\xi d\eta$ est inférieure au produit d'une constante par $\frac{\operatorname{sh} x}{[\operatorname{ch} (x - q) - 1]^2}$. Elle tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$.

Finalement l'intégrale $\iint_D \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| d\xi d\eta$ est bornée lorsque M s'éloigne indéfiniment. Il en est de même de :

$$\iint_D \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| d\xi d\eta.$$

Pour étudier $\iint_D \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta$, nous décomposerons D en $(D - D_i) + D_i$.

On a successivement :

$$\left| \iint_{D-D_i} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta \right| \leq k_2 e^{-t} \iint_{D-D_i} \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| d\xi d\eta \leq k_2 e^{-t} \iint_D \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| d\xi d\eta.$$

Choisissons l pour que la dernière expression soit inférieure à ε et prenons M à l'extérieur d'un domaine D_l plus grand que le domaine D_l ainsi choisi.

Des limitations déjà obtenues, on déduit :

$$\left| \iint_{D_l} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta \right| < k_2 \iint_{D_l} \delta_4 e^{-\pi x} d\xi d\eta < k_2 \delta_4 e^{-\pi x} 2l$$

(δ_4 , constante positive).

Or, l étant fixé, la dernière expression tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$.

D'où les résultats :

— les dérivées :

$$\iint_{D_l} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta, \quad \iint_{D_l} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \frac{\partial G}{\partial y} d\xi d\eta$$

tendent vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment.

C. — CONSÉQUENCE POUR LES TENSIONS

1 Des paragraphes A, B, on déduit, en premier lieu, les propriétés suivantes. En tout point M d'un arc Γ_1 , des demi-droites Θ et de Ox (extrémités exclues), la fonction f a une dérivée normale :

$$(169) \quad \frac{df}{dn} = \frac{dh}{dn} - \frac{15}{8\pi} \iint_{D_l} \frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2} \left[\frac{dG}{dn} \right]_M d\xi d\eta$$

qui est la limite de la dérivée dans la même direction en un point infiniment voisin situé sur la normale en M . Cette dérivée est continue sur chacun des arcs.

On peut définir la tension de cisaillement en un tel point. D'après (12) et (104) sa valeur absolue est :

$$(170) \quad \tau = -y^{-\frac{1}{2}} \frac{df}{dn} - \frac{3}{2} y^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{dy}{dn} - 4y \frac{dy}{dn} \right]$$

En M , le coefficient de concentration de tension $[I, 2, c]$ est, pour R quelconque :

$$(171) \quad c = -\frac{R}{4} \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{df}{dn} - \frac{3}{8} \frac{dy}{dn} - \frac{5}{8} \left(\frac{y}{R} \right)^4 \frac{dy}{dn}$$

Si, par similitude, on se ramène à $R = 1$, on voit qu'en deux points homologues les valeurs de c sont les mêmes.

Le facteur de concentration de tension ne dépend que des dimensions relatives et non des dimensions absolues (1).

(1) Question posée par le Dr W. HEROLD, VDI Zeitschrift, Bd 81, n° 18, 1^{er} mai 1937, pp. 505-509.

En S, supposé sur un arc Γ_1 , il devient, pour $R = 1$ (ce que nous supposons toujours, sauf mention expresse) :

$$(172) \quad c = -\frac{(1-p)^{\frac{5}{2}}}{4} \left(\frac{df}{dn} \right)_s + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} (1-p)^4.$$

2 Nous nous proposons maintenant de donner des résultats relatifs aux tensions. Ils constitueront la conclusion de l'étude faite jusqu'ici. Ils seront souvent donnés en comparant l'arbre Q (engendré par la rotation de D) et le cylindre parfait Q_i engendré par la rotation de la bande inaltérée D_i associée à D, ces deux arbres étant soumis au même couple de torsion.

Avant d'étudier la tension en un point déterminé de $(Ox + \Sigma)$ nous démontrerons des relations donnant des indications sur la variation totale de $\mathcal{E}$ et de c le long de Σ .

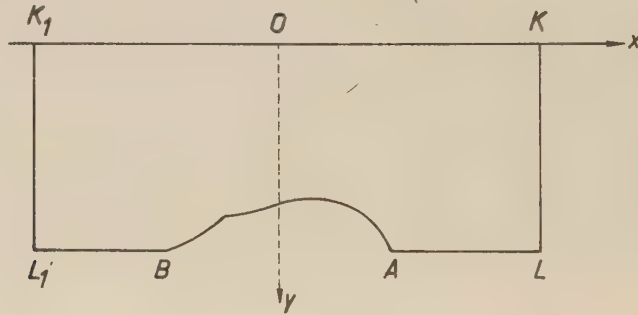


Fig. 10

Considérons un domaine D_l limité par les segments KL d'abscisse l et $K_1 L_1$ d'abscisse $-l$ (fig. 10). La formule de Green et la relation (123) s'appliquent à D_l . D'où :

$$\int_{D_l^*} y^2 \frac{df}{dn} d\sigma - \int_{D_l^*} \frac{5}{2} f y^2 \frac{dy}{dn} d\sigma = 0.$$

D'après les limitations obtenues (98), les intégrales le long de Ox sont nulles, et :

$$\int_{K_1 L_1 L K} y^2 \frac{df}{dn} d\sigma - \int_{\Gamma} \frac{5}{2} f y^2 \frac{dy}{dn} d\sigma = 0.$$

Faisons tendre l vers $+\infty$. On a vu que $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial I}{\partial x}$ tendent vers zéro, donc il en est de même de :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{15}{8\pi} \frac{\partial I}{\partial x}.$$

Par suite, l'intégrale $\int_0^1 y^{\frac{5}{2}} \frac{\partial f}{\partial x} dy$ tend vers zéro, et l'on obtient :

$$(173) \quad \int_{\Sigma} y^{\frac{5}{2}} \frac{df}{dn} d\sigma + \frac{5}{2} \int_{\Gamma} (1 - y^4) dx = 0.$$

On peut donner une autre forme à cette propriété, en faisant intervenir la tension de cisaillement (170). Il vient :

$$\int_{\Sigma} \left(\tau y^3 + 4 \frac{dy}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Considérons la tension longitudinale au même point M dans le cylindre Q_i associé, et soit τ_i sa projection sur la tangente en M à Γ . La relation précédente s'écrit :

$$(174) \quad \int_{\Sigma} (\tau - \tau_i) y^3 d\sigma = 4 \int_{\Gamma} (1 - y^4) dx.$$

Notons que y est voisin de 1 et que le deuxième membre de cette équation (174) est relativement petit.

Enfin, l'utilisation du coefficient de concentration de tension donné par (171) permet, par exemple, de mettre la relation (173) sous la forme remarquable suivante :

$$(175) \quad \int_{\Sigma} (c - 1) d\sigma + \text{longueur arc } \Gamma - 2q = 0.$$

Toutes ces formules sont vraies, quelle que soit la forme de Γ . Elles donnent une idée de la façon dont varie l'excès d'un élément $\frac{df}{dn}$, τ , c , sur l'élément correspondant pour le cylindre Q_i associé.

La valeur moyenne de c sur Σ est 1.

3 a) Reprenons la comparaison de f et de h . Dans D, on a $f < h$. D'où :

$$(176) \quad \frac{df}{dn} < \frac{dh}{dn}.$$

La formule (169) permet d'ailleurs d'obtenir directement cette propriété.

On a déjà encadré $\frac{dh}{dn}$ et borné supérieurement $\frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2}$ et $\left[\frac{dG}{dn} \right]_M$. On en déduit alors des limitations de $\frac{df}{dn}$ et par suite de c , limitations dont il sera question dans les paragraphes qui suivent;

b) *Tension sur Ox.*

D'après les relations (98), f a sur Ox une dérivée normale nulle. La fonction S (24) est alors comprise entre 1 et $1 + k_2 e^{-|x|}$. Or, lorsque p tend vers zéro, k_2 tend vers zéro. Lorsque la profondeur de l'encoche tend vers zéro, la fonction S tend vers 1 sur Ox.

En prenant :

$$p = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{8},$$

on obtient, quelle que soit la forme de Γ :

$$1 < S < 1 + 3 e^{-|x|}.$$

Le calcul numérique complet déjà signalé ⁽¹⁾ est effectué avec les valeurs précédentes de p et de q . Les résultats sont conformes à la double inégalité ci-dessus.

c) *Tension sur les demi-droites Θ .*

α) f est nul sur Θ et positif à l'intérieur. Donc :

$$\left(\frac{df}{dn}\right)_{\Theta} \geq 0.$$

Un raisonnement de BRELOT ⁽²⁾ montre même que l'on a :

$$\left(\frac{df}{dn}\right)_{\Theta} > 0.$$

La relation (170) donne alors :

$$(177) \quad \tau_{\Theta} < 4.$$

Pour un couple de torsion donné, le tracé dans une poutre cylindrique Q_i , d'une gorge de révolution ayant pour méridienne un arc Γ quelconque, a pour effet de diminuer la tension de cisaillement en tout point de la surface non altérée;

β) pour étudier le comportement de τ_{Θ} à l'infini nous chercherons de nouvelles bornes de f . Nous utiliserons à nouveau le théorème de [III, A, 1] et nous garderons les notations du chapitre III.

Prenons :

$$\Phi = K_1 y^{\frac{5}{2}} (1 - y) \quad (K_1, \text{ constante positive}).$$

On voit facilement que l'expression $\Delta \Phi - \frac{15}{4 y^2} \Phi$ est négative dans D.

En prenant :

$$(178) \quad K_1 \geq \frac{k_1}{p},$$

(1) SHORTLEY, WELLER, DARBY, GAMBLE. — Déjà cité.

(2) BRELOT. — Thèse, pp. 27-28.

k_1 étant toujours donné par (88) avec $k = 3$, on a $\Phi^* - f_n^* \geq 0$ sur Δ_n^* . Par suite, la différence $\Phi - f_n$ est positive dans Δ_n . D'où, pour la solution f du problème $\mathcal{P}'$:

$$(179) \quad f \leq K_1 y^{\frac{5}{2}} (1 - y) \quad \text{dans} \quad (D + D^*),$$

avec K_1 donné par (178).

Notons que si p tend vers zéro, $\frac{k_1}{p}$ tend vers 4.

Dès lors, comparons f à la nouvelle fonction :

$$\Phi = K_2 y^{\frac{5}{2}} (1 - y) e^{-|x|} \quad (K_2, \text{ constante positive}).$$

Utilisons toujours le théorème 1 et opérons comme dans le paragraphe [III, A, 2, c)]. On trouve encore, qu'en prenant :

$$(180) \quad K_2 \geq K_1 e^q,$$

on a :

$$(181) \quad f \leq K_2 y^{\frac{5}{2}} (1 - y) e^{-|x|} \quad \text{dans} \quad (D + D^*).$$

De cette relation on déduit :

$$(182) \quad \left(\frac{df}{dn} \right)_0 < K_2 e^{-|x|}.$$

La différence des tensions de cisaillement en deux points de C et de Q_i ayant même abscisse x , s'annule à l'infini, au moins comme $e^{-|x|}$.

Cas particulier.

Pour :

$$p \leq \frac{1}{8}, \quad q \leq \frac{1}{8},$$

on peut prendre :

$$K_1 = 6,5, \quad K_2 = 7,5;$$

γ) lorsque Γ est un demi-cercle Γ_c , on peut encadrer le facteur de concentration de tension. Les relations (136), (171), (176) donnent en effet :

$$(183) \quad 1 - \frac{q^2}{x^2} - \frac{3}{16} N \frac{q^4}{x^2} \left(1 - \frac{q^2}{x^2} \right) < c < 1,$$

N étant le nombre défini dans le paragraphe [IV, A, 3].

Rappelons que pour $q \leq \frac{1}{8}$ on peut prendre $N = 3,5$.

4 TENSION EN A.

Plaçons-nous uniquement dans le cas où l'angle A est droit. On a vu que lorsque le point M de Θ tend vers A, $\left(\frac{dh}{dn}\right)_\Theta$ tend vers 4 [IV, A, 4], et que $\left(\frac{dI}{dn}\right)_\Theta$ tend vers zéro [IV, B, 2]; d'après la relation (169), $\left(\frac{df}{dn}\right)_\Theta$ tend vers 4. Par suite (170), $\bar{c}$ tend vers zéro.

De la même façon si le point M de Γ tend vers A, $\left(\frac{dh}{dn}\right)_\Gamma$ et $\left(\frac{dI}{dn}\right)_\Gamma$ tendent vers zéro, et la même relation (170) montre que $\bar{c}$ tend également vers zéro.

Lorsque la gorge de l'arbre Q est orthogonale à la surface du cylindre, la tension en un point M quelconque de la surface tend vers zéro, lorsque M tend vers un point du cercle formant l'arête de séparation.

5 TENSION SUR LE DEMI-CERCLE Γ_c D'UN DOMAINE D_c .

Nous étudions ici le seul cas où Γ est un demi-cercle.

Sur ce demi-cercle on a vu que $\frac{dh}{dn}$ était négative ou nulle [IV, A, 5]. On a donc, *a fortiori* :

$$(184) \quad \left(\frac{df_c}{dn}\right)_{\Gamma_c} < 0.$$

La tension en un point M de la gorge d'un arbre Q_c est supérieure à la projection sur le plan tangent en M de la tension longitudinale en ce point dans le cylindre Q_i associé (soumis à la même torsion).

La relation (174) permet de calculer une borne supérieure de la valeur moyenne de $\bar{c}_c - \bar{c}_i$ sur Γ_c . En effet, on a :

$$\int_{\Gamma_c} y^3 (\bar{c}_c - \bar{c}_i) d\sigma = 4 \int_{\Gamma_c} (1 - y^4) dx - \int_{\Theta_c} (\bar{c}_c - \bar{c}_i) d\sigma.$$

Or :

$$0 < (\bar{c}_i - \bar{c}_c)_{\Theta_c} = \left(\frac{df_c}{dn}\right)_{\Theta_c} < \left(\frac{dh_c}{dn}\right)_{\Theta_c},$$

d'où, en utilisant (136) :

$$(1 - p)^3 \int_{\Gamma_c} (\bar{c}_c - \bar{c}_i) d\sigma < 8\pi p^2 + 8p + Np^3.$$

La valeur moyenne de $\bar{c}_c - \bar{c}_i$ le long de Γ_c est alors inférieure à :

$$\frac{8 + 8\pi p + Np^2}{\pi(1 - p)^3}.$$

Remarquons que, lorsque p tend vers zéro, cette expression tend vers $\frac{8}{\pi}$, tout comme la valeur moyenne de $\bar{c}_i$.

Enfin, au sommet S, on peut encadrer $\frac{df_c}{dn}$. En effet, $\frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2}$ a été bornée plusieurs fois, $\left(\frac{dh_c}{dn}\right)_s$ a été encadrée, et l'on a :

$$\left[\frac{dG_c}{dn}\right]_s < \left[\frac{d^c c}{dn}\right]_s = \frac{4\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 - p^2)}{[(\eta_1 + p)^2 + \xi_1^2][(\eta_1 - p)^2 + \xi_1^2]}, \quad \eta_1 = \pi - \eta, \quad \xi_1 = \xi.$$

La relation (151) permet alors d'écrire pour $p \leq \frac{1}{8}$:

$$(185) \quad \left(4 + \frac{21}{4} p^2\right) \left[\frac{dH_{1c}}{dn}\right]_s - \frac{15}{8\pi} \int_D \left(\frac{\bar{f}}{\eta^2}\right) \left[\frac{d^c c}{dn}\right]_s d\xi d\eta < \left(\frac{df_c}{dn}\right)_s < 4 \left(\frac{dH_{1c}}{dn}\right)_s - \frac{15}{4} p^2,$$

$\left(\frac{\bar{f}}{\eta^2}\right)$ étant une borne supérieure de $\frac{f(\xi, \eta)}{\eta^2}$.

On peut ainsi encadrer c_s . En particulier, en utilisant les relations (153) on a, pour le domaine D_a (avec $p = \frac{1}{8}$) et à l'approximation déjà indiquée :

$$(186) \quad \underline{c_s > 1,485.}$$

En particulier, pour un arbre Q_c , la tension au fond de la gorge est nettement supérieure à la tension sur la surface du cylindre ayant même axe que Q_c , tangent à Q_c au fond de la gorge et soumis au même couple de torsion. Au point de vue pratique ce dernier arbre est donc plus intéressant que Q_c .

6 VARIATIONS DE LA TENSION LORSQUE LES DIMENSIONS DE Γ VARIENT DANS CERTAINES CONDITIONS.

a) Agrandissons le demi-cercle Γ_c d'un domaine D_c de façon à former un arc Γ ayant Oy pour axe de symétrie et coupé seulement en deux points par une parallèle à Ox . Cet arc, le domaine D et l'arbre Q correspondants s'appelleront Γ_s , D_s et Q_s . Reprenons les notations du paragraphe [IV, A, 7] et de la figure 8. Soient f_c et f les fonctions correspondant aux domaines, D_c initial et D_s final. En tenant compte des relations (154), on a :

$$(187) \quad f_c(\mu) < h_c(\mu) \leq h(\mu) = f(\mu).$$

Ainsi, sur D_s^* entier, on a $f^* - f_c^* \geq 0$.

Or, la fonction $f - f_c$ prend sur l'arc Γ_s une suite de valeurs formant une fonction de y , soit $\varphi(y)$, possédant les propriétés (29). Donc, on a :

$$(188) \quad f > f_c \quad \text{dans} \quad D,$$

et par suite :

$$\frac{df}{dn} > \frac{df_c}{dn}$$

sur les parties communes de D_c^* et de D_s^* .

Si l'on agrandit la gorge d'un arbre Q_c de façon à former un arbre Q_s , la tension diminue en tout point de la surface de Q_c non altérée, et en particulier sur la partie cylindrique.

On peut également tirer, de ce qui précède, des conclusions relatives à la tension en S, en supposant que ce point reste le sommet de Γ_s , la profondeur maximum restant p , rayon de Γ_c . Le raisonnement ci-dessus s'applique. Au sommet S, on a $f = f_c$, et à l'intérieur de D_s , $f > f_c$. D'où :

$$(189) \quad \left(\frac{df}{dn}\right)_s > \left(\frac{df_c}{dn}\right)_s.$$

Si l'on agrandit la gorge d'un arbre Q_c de façon à former un arbre Q_s de même sommet S, la tension et le facteur de concentration de tension diminuent en ce point (1); et cela, bien qu'on ait enlevé de la matière;

b) transformons maintenant Σ par homothétie de centre O_1 et de rapport $\frac{1}{R}$ compris entre zéro et un. On obtient un domaine D_R limité par Ox et Σ_R homologue de Σ . Comparons les tensions $(\bar{c})_s$ et $(\bar{c}_R)_{s_R}$ aux deux sommets S et S_R .

Soit $f_R(X, Y)$ la solution du problème $\mathcal{P}'$ pour D_R . A tout point (X, Y) de $(D_R + D_R^*)$ faisons correspondre le point $(X'' = RX, Y'' = RY)$ et la fonction :

$$(190) \quad f''(X'', Y'') = R \cdot f_R(X, Y).$$

La fonction f'' satisfait, dans le domaine D'' , homologue de D dans l'homothétie (O_1, R) , à l'équation :

$$\Delta f'' = \frac{15}{4(R - Y'')^2} f''.$$

Elle s'annule sur la droite $Y'' = R$ et à l'infini, elle prend sur Σ la valeur $R \Phi\left(\frac{Y''}{R}\right)$.

La différence :

$$F(X, Y) = f''(X, Y) - f(X, Y)$$

est alors solution régulière dans D de l'équation :

$$(191) \quad \Delta F = \frac{15}{4(R - Y)^2} F + \frac{15f}{4} \left[\frac{1}{(R - Y)^2} - \frac{1}{(1 - Y)^2} \right].$$

Elle est positive sur Ox , nulle à l'infini, et elle prend sur Σ la valeur $R \Phi\left(\frac{Y}{R}\right) - \Phi(Y)$. On vérifie que cette dernière expression, nulle pour $Y = 0$, passe par un minimum négatif en S. Le deuxième terme du deuxième membre de l'équation

(1) Cette propriété est à rapprocher de la formule de Neuber : NEUBER, *Theory of Notch Stresses*, translated from the german for the David Taylor Model Basin, U.S. Navy, by F. A. RAVEN, 1946, p. 100 (formule approchée dans le cas qui nous occupe).

(191) étant négatif dans D, on en déduit, comme dans le théorème 3 [III, A, 1], que la fonction F est supérieure à ce minimum dans D. Par suite, on a $\left(\frac{dF}{dn}\right)_s > 0$, ou encore:

$$(192) \quad \left(\frac{df''}{dn}\right)_s > \left(\frac{df}{dn}\right)_s.$$

Mais, de la relation (190), on déduit :

$$\left(\frac{df''}{dn}\right)_\Sigma = \left(\frac{df_R}{dn}\right)_{\Sigma_R},$$

d'où, grâce à (192), l'inégalité :

$$\left(\frac{df_R}{dn}\right)_{s_R} > \left(\frac{df}{dn}\right)_s.$$

L'expression (170) de la tension de cisaillement donne alors :

$$(\bar{c}_R)_{s_R} < (\bar{c})_s.$$

On obtient ainsi l'énoncé :

— si l'on diminue les dimensions de Γ par homothétie de centre O_1 (sans changer Ox), la tension au fond de la gorge diminue.

Cette propriété s'applique en particulier à tout arbre Q_c dont la gorge diminue.

D'autre part, si p tend vers zéro, $\left(\frac{dh_c}{dn}\right)_s$ tend vers -4 [IV, A, 7], et $\left(\frac{dI_c}{dn}\right)_s$ tend vers zéro [IV, B, 3]. De plus, en tout point fixe de Θ_c , $\left(\frac{dh_c}{dn}\right)$ tend vers zéro [IV, A, 3], donc, *a fortiori* (176), $\left(\frac{df_c}{dn}\right)_{\Theta_c}$ tend vers zéro.

Si la gorge d'un arbre Q_c tend vers zéro, la tension au fond de la gorge tend vers le double de la tension à la surface de l'arbre Q_i associé (1), si bien que le facteur de concentration de tension tend vers 2; dans les mêmes conditions, la tension en tout point fixe de la surface cylindrique tend vers la tension à la surface de l'arbre Q .

On a vu dans la première partie que f tend vers zéro avec p . D'où une différence essentielle entre le comportement de f et celui de $\left(\frac{df_c}{dn}\right)_{\Gamma_c}$ lorsque p tend vers zéro.

7 Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que S est sur un arc Γ_1 , si bien que $\left(\frac{df}{dn}\right)_s$ existe. Voyons maintenant le cas où S est sur un point anguleux, et soit $\nu \pi$ l'angle formé par les deux demi-tangentes en ce point, cet angle étant compté comme dans le paragraphe [II, A, 3] vers l'intérieur de D ($1 < \nu \leq 2$). Faisons la représentation conforme de D sur le demi-plan z' et soit S' (z'_0) l'homologue de S.

(1) Ce résultat, important au point de vue pratique, est indiqué sans démonstration par TIMOSHENKO, *Théorie de l'élasticité*, 1936, p. 303.

Dans le voisinage de S' on a (39) :

$$(193) \quad \frac{dZ}{dz'} = (z' - z'_0)^{\nu-1} \chi(z'),$$

$\chi(z')$ étant régulière, et $\chi(z'_0)$ différent de zéro.

Dans cette transformation conforme, la fonction harmonique h devient une fonction harmonique h' ayant sur l'arc x' un maximum en S' . Lorsque le point M' de cet axe tend vers S' , la dérivée normale de h' tend vers un nombre *négalif*. L'expression (193) montre alors que si le point M situé sur l'un des arcs aboutissant en S tend vers ce point (fig. 11), la dérivée $\left(\frac{dh}{dn}\right)_M$ tend vers $-\infty$ (1). Il en est de même, *a fortiori*, de $\left(\frac{df}{dn}\right)_M$.

Dans le cas où S est un point anguleux de Γ , la tension en un point de la gorge de l'arbre correspondant Q tend vers l'infini lorsque ce point tend vers S .

Physiquement, cette propriété n'est pas acceptable.

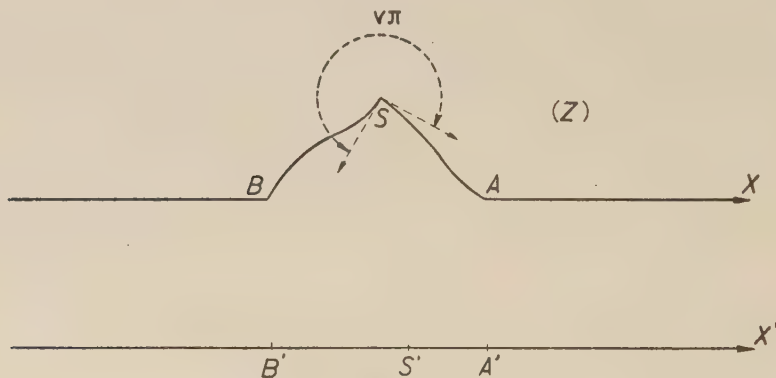


Fig. 11

8 Jusqu'ici, on a étudié l'influence des variations de Γ . On peut également diminuer D vers l'axe Ox ou vers les extrémités.

Soit un arbre creux Q_g , de longueur infinie, et dont la section par un demi-plan méridien est un domaine D_g limité par Σ et par la droite $y = r$ ($0 < r < 1 - p$).

La fonction U à déterminer devient une fonction U_g , solution régulière dans D_g de la même équation (13), bornée à l'infini et prenant sur la droite $y = r$ et sur Σ les valeurs $\frac{r^4}{1-r^4}$ et $\frac{1}{1-r^4}$ (nombres ainsi choisis pour que leur différence soit égale à 1). Le moment de torsion appliqué à Q_g sera ainsi le même, 2π , que celui appliqué à Q dans l'étude qui précède.

(1) On peut obtenir directement cette propriété dans le cas où Γ est formé par deux segments de droites AS , BS accolés et perpendiculaires à Ox , car dans ce cas on connaît la fonction :

$$Z = \text{Log} \frac{\sqrt{1-a^2} + \sqrt{z'^2-a^2}}{\sqrt{1-a^2} - \sqrt{z'^2-a^2}} \quad (a, \text{ affixe de } A', \text{ homologue de } A)$$

assurant la correspondance conforme entre le domaine et le demi-plan $\Re z' > 0$.

Faisons le changement :

$$(194) \quad U_g = \frac{y^4 + y^{3,2} f_g}{1 - r^4}.$$

Il faut alors déterminer la fonction f_g , solution régulière dans D_g de l'équation (19), bornée à l'infini, prenant sur la droite $y = r$ la valeur zéro et sur Σ la valeur :

$$\varphi(y) = \frac{1 - y^4}{y^{3/2}}.$$

On montre que f_g a des dérivées normales dans les mêmes conditions que f , et que la tension en un point M de Σ est :

$$(195) \quad \mathcal{C}_g = \frac{\mathcal{C}'}{1 - r^4},$$

avec :

$$(196) \quad \mathcal{C}' = -y^{-\frac{1}{2}} \frac{df_g}{dn} - \left(\frac{5}{2} y + \frac{3}{2y^3} \right) \frac{dy}{dn}.$$

On voit, comme pour f , que f_g est nulle à l'infini. La différence $f - f_g$ est nulle sur Σ , elle est positive sur la droite $y = r$. Donc elle est positive dans D_g , et par suite l'on a :

$$(197) \quad \left(\frac{df}{dn} \right)_{\Sigma} - \left(\frac{df_g}{dn} \right)_{\Sigma} > 0.$$

En utilisant (170) et (196) on voit alors que $\mathcal{C}'$ est au moins égal à $\mathcal{C}$ sur Σ et l'on obtient, *a fortiori* :

$$(198) \quad (\mathcal{C}_g)_{\Sigma} > (\mathcal{C})_{\Sigma}.$$

Si l'on remplace l'arbre Q par l'arbre creux Q_g de même profil extérieur, la tension croît en tout point de la surface extérieure (pour un même couple de torsion).

Bornons $\mathcal{C}'$, dans le cas de Γ_c . Pour cela, nous comparerons $f - f_g = F$ à la fonction harmonique :

$$\Phi(X, Y) = K_3 \left(Y - \frac{Y p^2}{X^2 + Y^2} \right) \quad (K_3, \text{ constante positive}).$$

Sur la droite $y = r$, on a :

$$F < k_2 y^{5/2} e^{-|x|},$$

k_2 étant toujours donné par (92).

Prenons :

$$(199) \quad K_3 = k_2 \frac{r^{5/2} (1 - r)}{(1 - r)^2 - p^2}.$$

Alors sur D_g^* entier, on a :

$$\Phi^* - F^* \geq 0.$$

Donc, $\Phi - F$ est positif dans D , et puisque $\Phi - F = 0$ sur Σ , on a :

$$\left(\frac{d\Phi}{dn}\right)_{\Sigma} - \left(\frac{dF}{dn}\right)_{\Sigma} > 0,$$

et par suite :

$$\left(\frac{df}{dn}\right)_{\Sigma} - \left(\frac{df_g}{dn}\right)_{\Sigma} < \left(\frac{d\Phi}{dn}\right)_{\Sigma},$$

soit enfin :

$$\bar{c}' - \bar{c} < y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{d\Phi}{dn}\right)_{\Sigma}.$$

On en déduit :

$$(200) \quad \bar{c}_g < \frac{\bar{c}}{1-r^4} + \frac{1}{y^{1/2}(1-r^4)} \left(\frac{d\Phi}{dn}\right)_{\Sigma}.$$

En particulier, en S , on a :

$$(201) \quad (\bar{c}_g)_s < \frac{(\bar{c})_s}{1-r^4} + \frac{2 K_3}{(1-p)^{1/2} (1-r^4)}.$$

Application numérique.

La relation (201) permet de borner $(\bar{c}_g)_s - (\bar{c})_s$. Effectuons les calculs pour :

$$\underline{p = r = \frac{1}{8}}.$$

Dans ce cas on a $(\bar{c})_s < 10$, et la différence $(\bar{c}_g)_s - (\bar{c})_s$, positive, est inférieure à 0,017. Si, dans ces conditions, on remplace Q par Q_g , le facteur de concentration de tension en S (par rapport au cylindre parfait *plein*), augmente de moins de 0,003.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

APPLICATION DU CALCUL SYMBOLIQUE A L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Vu et approuvé :

Paris, le 10 juin 1950.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.



IMPRIMERIE



IMPRIMERIE